PAUL R. RIDER

algebra

PAUL R. RIDER

COLLEGE ALGEBRA

ALGEBRA

COLLEGE ALGEBRA

EDICION REVISADA

POR

PAUL R. RIDER

PH. D.; JEFE DEL DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA DEL LABORATORIO DE INVESTIGACIONES AERONÁUTICAS DE LA BASE AÉREA WRIGHT-PATTERSON, PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD WASHINGTON

EH

EDITORIAL HERRERO, S. A.

TÍTULO DEL ORIGINAL EN INGLÉS:
COLLEGE ALGEBRA
COPYRIGHT © 1940, 1955, BY THE MACMILLAN COMPANY, NEW YORK
TRADUCIDO AL ESPAÑOL POR J. M. VERREY

Primera edición 1964: 3,000 ejemplares.
Segunda edición 1967: 3,000 ejemplares.

DERECHOS RESERVADOS © PARA TODOS LOS PAÍSES DE HABLA ESPAÑOLA, POR EDITORIAL HERRERO, S. A., AMAZONAS Nº 44. MÉXICO 5, D. F. – IMPRESO EN LITOGRÁFICA INGRAMEX, S. A., PROSPERIDAD Nº 75, MÉXICO 18. D. F. – 20 DE ENERO DE 1967 – PROHIBIDA LA REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL SIN PERMISO DE LOS EDITORES.

PRINTED IN MEXICO – IMPRESO EN MÉXICO

Introducción a la edición revisada

El principal cambio que se ha hecho en esta edición revisada radica en la Introducción. Se ha elaborado una revisión más completa del álgebra elemental, permitiendo de esta manera un estudio más fácil y más gradual del tema y una presentación dedicada especialmente al estudiante de preparación anterior deficiente. Se han considerado con más detalles y se han discutido con más amplitud las ideas básicas y los principios fundamentales; además, la estructura lógica se ha perfeccionado en ciertos lugares. Se ha logrado dar explicaciones más completas en cuanto al sistema de números del álgebra. Los ejercicios que se agregan son completamente nuevos.

En cambio se ha conservado el estilo de presentación que se empleó en la edición original y que, aparentemente, ha merecido buena acogida, pero algunas secciones se redactaron de nuevo, de manera a hacerlas aún más claras.

El manuscrito ha sido leído y criticado por el profesor Franz E. Hohn, de la Universidad de Illinois, que ha hecho algunas sugestiones valiosas para mejorarlo. Revisó también las resoluciones de los ejercicios. Por esta ayuda quiero expresarle mis más sinceros agradecimientos.

P.R.R.

Dayton, Ohio.

Introducción a la edición revisada

El principal cambio que se ha hecho en esta edición revisada es la de la introducción. Se ha elaborado una revisión más completa del álgebra elemental, presentando de esta manera un estudio más lógico y más gradual del tema y una presentación deductiva [illegible] el resultado de proporción [illegible]. Se han simplificado con más detalles y se han diseñado con más amplitud las ideas básicas y los principios fundamentales; además, la notación lógica se ha perfeccionado en ciertos lugares. En la mayoría de capítulos se [illegible] completos en cuanto al número de problemas del álgebra. Los ejercicios que se agregan son completamente nuevos.

El cambio no ha modificado el estilo de presentación que se empleó en la edición original y que, afortunadamente, ha merecido buena acogida, pero algunos métodos se reformaron de acuerdo, de manera a hacerlo más claro.

El contenido ha sido leído y revisado por el profesor Frank E. Hohn, de la Universidad de Illinois, que ha hecho algunas sugerencias valiosas para su revisión. Revisó también las resoluciones de los ejercicios. Por este medio quiero expresarle mi más sincero agradecimiento.

F.R.R.

[illegible], 1962

Introducción a la primera edición

Este libro de texto ha sido preparado para el uso de los estudiantes de primer año en colegios y escuelas técnicas. Los métodos de presentación son los que han resultado los más indicados durante muchos años de experiencia de la enseñanza con grupos e individuos con distintos grados de preparación. Una edición preliminar mimeografiada se empleó en más de veinte secciones de estudiantes en varias divisiones de la Universidad de Washington —el Colegio de Artes Liberales, incluyendo los cursos pre-comerciales y otros cursos pre-profesionales, las Escuelas de Ingeniería y de Arquitectura, y las clases nocturnas.

Aunque el objetivo primordial ha sido la claridad en las explicaciones, la cuestión del rigor lógico ha sido tomada en cuenta siempre, y se ha hecho un esfuerzo para distinguir cuidadosamente entre suposiciones y verdades. Se espera que los estudiosos de este libro desarrollarán una apreciación del rigor, especialmente aquellos estudiantes que más tarde seguirán cursos de matemáticas más avanzados.

La primera parte de este libro la constituye una revisión completa de los temas tratados en álgebra elemental e intermedia. Se escribió con, la idea de que muchos estudiantes tienen escasa habilidad en manipulaciones algebraicas, aunque supone un nivel de inteligencia que puede razonablemente esperarse de estudiantes de primer año de colegios y universidades. Unas clases bien preparadas pueden encargarse muy rápidamente de esta parte, o omitirla completamente, para proceder al estudio de las últimas partes. Los estudiantes maduros encontrarán el material suficiente para un curso sumamente completo, con todos los temas enseñados en álgebra elemental, junto con ciertos temas adicionales que, por su importancia, se juzgaron dignos de incluirse. Los que no se sienten bien preparados pueden estudiar la primera parte lentamente y, después, pasar a los capítulos y temas de la última parte del libro que el maestro considere indicados.

El arreglo de los capítulos y de los temas pudo ser delineado solamente después de consultas por parte del personal directivo de Macmillan con un número considerable de profesores de la materia de varias instituciones en distintas partes del país. Aunque el orden actual es un com-

puesto de sugestiones y representa la presentación que parecía la más deseable a la mayoría, los capítulos individuales han quedado hasta cierto punto independientes por medio de referencias cruzadas y de una constante repetición de las ideas conexas más importantes. Debido a esto, el maestro que prefiera una diferente secuencia de capítulos o que desee omitir parte del material, encontrará que este libro puede adaptarse fácilmente a sus necesidades.

El libro contiene una cantidad abundante de ejercicios seleccionados y graduados. Las contestaciones a los ejercicios de numeración impar se dan al final del libro, las de numeración par forman parte de un folleto por separado. Este folleto puede adquirirse por los estudiantes con la recomendación de su maestro.

Entre las características especiales podría mencionarse el tratamiento dado a los determinantes. Se sigue el método indicado por G. D. Birkhoff en su artículo "Determinantes" de la Enciclopedia Británica. Se cree que es un poco más sencillo que el método usual basado en la idea oe inversiones en el orden. Agradezco a mi colega, el profesor H. R. Grummann, por haberme dado a conocer este método.

El capítulo dedicado a la teoría de las ecuaciones contiene más material de lo que se encuentra en muchos textos de álgebra elemental. Una característica importante es la inclusión de la regla de signos de Descartes en forma extendida, que declara que el número de raíces positivas es igual al número de variaciones en signos o es menor por un número par. De esta manera es mucho más útil aunque ligeramente más difícil de comprobar. Además del método de Horner para la resolución de ecuaciones, se da otro método aproximado que consiste principalmente en interpolación línear. Este método alterno, además de su simplicidad, tiene la ventaja de poder aplicarse a cualquier tipo de ecuación. La materia se presenta de tal manera que cualquiera de los dos métodos puede omitirse a juicio del maestro.

La fórmula binomial para los que no son exponentes integrales positivos se da, por razón de su utilidad, aunque sin comprobación alguna.

Se han simplificado considerablemente las reglas para determinar las características de un logaritmo y para señalar un antilogaritmo, puesto que las cuatro reglas que se ofrecen generalmente han sido sustituidas por una sola. Se explica la cuestión de la exactitud de resultados al emplear números aproximados.

Respecto al capítulo sobre interés compuesto y anuidades, se dan tablas de cantidades compuestas, valores actuales, cantidades y valores actuales de anuidades. Puesto que cualquier persona que tenga algo que

ver con transacciones financieras tendrá que emplear tablas de esta clase, parece indicado que el estudiante aprenda a emplear dichas tablas mediante la resolución de problemas.

La aplicación de la probabilidad a las tablas de defunción se enfatiza en el capítulo sobre probabilidad.

Debido al crecimiento rápido y reciente de la estadística y suponiendo que muchos estudiantes se han de dedicar más tarde a trabajos estadísticos, pareció indicado incluir un capítulo elemental sobre las diferencias finitas. Este tema que durante mucho tiempo ha sido eliminado en los libros de álgebra, merece otra vez su inclusión.

Quiero aprovechar esta oportunidad para agradecer a mis colegas de la Universidad Washington el uso de la edición preliminar mimeografiada de este libro y hacerme valiosas sugestiones en cuanto a su perfeccionamiento. Quiero también expresar mi agradecimiento a la Compañía Macmillan por la importante ayuda editorial que me prestaron durante el proceso de revisión y corrección. La revisión de la edición mimeografiada ha sido leída y criticada por tres de sus consejeros y, después de otra revisión más completa aún en la cual se tomó en cuenta las críticas de estos consejeros y se incluyeron sus sugestiones, se leyó por última vez por las mismas personas y se hicieron las últimas revisiones y correcciones.

P.R.R.

San Luis, Missouri.
Febrero de 1940.

[illegible] indicado que [illegible] diante la resolución de problemas.

La aplicación de la probabilidad a [illegible] se estudia en el capítulo sobre probabilidad.

Debido a [illegible] que muchos estudiantes se han de dedicar más tarde a trabajos [illegible] diferentes [illegible]

Quiero agradecer [illegible] de la Universidad Washington el uso de la [illegible] Quiero también [illegible] a la Compañía Macmillan [illegible] el proceso de [illegible]

E. R. P.

San Luis, Missouri,
Agosto de 1949

Tabla de materias

I. Revisión del álgebra elemental. **1**

1.1. Introducción, 1. 1.2. Operaciones fundamentales, 1. 1.3. Reglas fundamentales, 2. 1.4. Números con signos, 3. 1.5. Operaciones con números con signos, 4. 1.6. Expresiones algebraicas, 6. 1.7. Exponentes, 6. 1.8. Adición y sustracción de términos similares, 6. 1.9. Multiplicación de términos, 7. 1.10. Potencia de los términos, 8. 1.11. División de términos, 8. 1.12. Símbolos de grupos, 10. 1.13. Polinomios, 13. 1.14. Adición y sustracción de polinomios, 13. 1.15. Multiplicación de polinomios, 15. 1.16. División de polinomios, 16. 1.17. Constantes y variables, 18. 1.18. Funciones, 19. 1.19. El eje de los números reales, 22. 1.20. Coordinadas rectangulares, 22. 1.21. Gráficas, 23.

II. Ecuaciones lineales. **27**

2.1. Ecuaciones, 27. 2.2. Ecuaciones equivalentes, 28. 2.3. Operaciones que dan ecuaciones equivalentes, 28. 2.4. Ecuaciones lineales con una incógnita, 28. 2.5. Problemas en palabras, 31. 2.6. Ecuaciones lineales con dos incógnitas, 36. 2.7. Ecuaciones lineales de tres o más incógnitas, 38. 2.8. Más problemas enunciados con palabras, 41.

III. Factores. **48**

3.1. Polinomios, 48. 3.2. Determinación de factores, 48. 3.3. Productos tipo, 48. 3.4. Tipos de factores elementales, 50. 3.5. Otros tipos complicados, 52. 3.6. Otros tipos, 53. 3.7. Sugestiones para sacar factores, 54. 3.8. El factor común más alto y el múltiple común más bajo, 56.

IV. Fracciones. **58**

4.1. Principios fundamentales, 58. 4.2. Adición y sustracción de fracciones, 60. 4.3. Expresiones mixtas, 61. 4.4. Multiplicación de fracciones, 64. 4.5. Potencias de fracciones, 64. 4.6. Fracciones complejas, 64. 4.7. Divisiones de fracciones, 66. 4.8. Raíces extrañas, 69. 4.9. Ecuaciones que incluyen fracciones, 70.

V. Exponentes y radicales. **73**

5.1. Leyes de los exponentes, 73. 5.2. Raíces, 73. 5.3. Radicales, 74. 5.4. Exponentes fraccionales, 75. 5.5. Exponente cero, 76. 5.6. Exponentes negativos, 76. 5.7. Números racionales e irracionales, 79. 5.8. Leyes de radicales, 80. 5.9. Para eliminar factores de los radicales o introducirlos en los mismos, 80. 5.10. Para reducir el índice de un radical, 81. 5.11. Para racionalizar el denominador, 82. 5.12. Reducción de expresiones radicales a su forma más sencilla, 84. 5.13. Adición y sustracción de radicales, 86. 5.14. Multiplicación de radicales, 87. 5.15. División de radicales, 88. 516. Números imaginarios y complejos, 90. 5.17. Operaciones con números complejos, 91.

VI. Ecuaciones cuadráticas. 94

6.1. Ecuaciones cuadráticas, 94. 6.2. Solución por factorización, 94. 6.3. Cuando falta el término de primer grado, 95. 6.4. Completando el cuadro, 95. 6.5. Solución por fórmula, 96. 6.6. Ecuaciones en forma cuadrática, 101. 6.7. Ecuaciones involucrando radicales, 103. 6.8. Carácter de las raíces, 106. 6.9. Suma y producto de las raíces, 109. 6.10. Formación de una ecuación con raíces dadas, 110. 6.11. Para factorizar resolviendo una cuadrática, 112. 6.12. Representación gráfica de una función cuadrática, 114. 6.13. Valor máximo y mínimo de una función cuadrática, 115.

VII. Sistemas de ecuaciones involucrando cuadráticas. 118

7.1. Ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas, 118. 7.2. Una ecuación linear, otra cuadrática, 118. 7.3. Ecuaciones lineares en los cuadrados de las incógnitas, 120. 7.4. Todos los términos involucrando las incógnitas del segundo grado, 121. 7.5. Ecuaciones simétricas, 123. 7.6. Diversos métodos y tipos, 125. 7.7. Representación gráfica, 127.

VIII. Desigualdades. 136

8.1. Desigualdades, 136. 8.2. Propiedades fundamentales, 137. 8.3. Resolución de desigualdades, 138. 8.4. La función cuadrática general, 140.

IX. Variación. 144

9.1. Relación y proporción, 144. 9.2. Variación directa, 144. 9.3. Variación inversa, 145. 9.4. Variación conjunta, 145.

X. Inducción matemática y fórmula del binomio. 150

10.1. Inducción matemática, 150. 10.2. La fórmula del binomio, 154. 10.3. El triángulo de Pascal, 156. 10.4. El término general de la fórmula binomial, 156. 10.5. El teorema binomial para exponentes integrales positivos, 158. 10.6. Las series binomiales, 159.

XI. Progresiones. 162

11.1. Progresión aritmética, 162. 11.2. El N.avo. término de una progresión aritmética, 162. 11.3. La suma de una progresión aritmética, 162. 11.4. Medianos aritméticos, 163. 11.5. Progresión geométrica, 165. 11.6. El N.avo término de una progresión geométrica, 165. 11.7. La suma de una progresión geométrica, 165. 11.8. Medianos geométricos, 166. 11.9. Progresión geométrica infinita, 168. 11.10. Decimales repetidores, 169. 11.11. progresión armónica, 171.

XII. Números complejos. 176

12.1. Números imaginarios y complejos, 176. 12.2. El sistema de números del álgebra, 176. 12.3. Operaciones con números complejos, 178. 12.4. Representación geométrica de números complejos, 179. 12.5. Adición y sustracción geométricas de números complejos, 180. 12.6. Forma trigonométrica de los números complejos, 181. 12.7. Multiplicación y división de números complejos en la forma trigonométrica, 183. 12.8. Potencias de números complejos, 184. 12.9. Raíces de números complejos, 185.

XIII. Teoría de las ecuaciones. 189

13.1. Polinomios, 189. 13.2. Teorema del remanente, 189. 13.3. Teorema del factor, 190. 13.4. Inversa del Teorema del factor, 190. 13.5. Di-

visión sintética, 190. 13.6. Localización de los ceros reales de un polinomio, 193. 13.7. Límites superiores e inferiores para raíces, 195. 13.8. Número de raíces, 197. 13.9. Raíces imaginarias, 198. 13.10. Raíces cuadráticas, 199. 13.11. Gráfica de un polinomio factorizado, 200. 13.12. Regla de signos de Descartes, 201. 13.13. Raíces racionales, 204. 13.14. Raíces irracionales, 207. 13.15. Transformación para reducir las raíces de una ecuación en una cantidad fija, 210. 13.16. Método de Horner, 211. 13.17. Sugestiones para encontrar las raíces reales de una ecuación numérica, 214. 13.18. La ecuación cúbica general, 215. 13.19. La ecuación cuártica general, 219. 13.20. Solución algebraica de ecuaciones, 221. 13.21. Coeficientes en términos de raíces, 222.

XIV. Logaritmos. **224**

14.1. Logaritmos, 224. 14.2. Mantisa, 225. 14.3. Característica, 226. 14.4. Localización de la mantisa, 228. 14.5. Localización del antilogaritmo, 230 14.6. Leyes de los logaritmos, 231. 14.7. Computación con logaritmos, 233. 14.8. Cologaritmos, 236. 14.9. Ecuaciones exponenciales, 239. 14.10. Bases diferentes de 10, 240. 14.11. Logaritmos comunes y naturales, 241. 14.12. Cambio de base, 242. 1413. Ecuaciones diversas, 243.

XV. Interés compuesto y anualidades. **246**

15.1. Cantidades compuestas, 246. 15.2. Valor actual, 247. 15.3. Anualidad, 250. 15.4. Cantidad de una anualidad, 250. 15.5. Valor actual de una anualidad, 251.

XVI. Permutaciones y combinaciones. **256**

16.1. Principio fundamental, 256. 16.2. Permutaciones, 257. 16.3. Permutaciones de cosas de las cuales algunas son similares, 258. 16.4. Combinaciones, 260. 16.5. Coeficientes binomiales, 261. 16.6. Número total de combinaciones, 262.

XVII. Probabilidad. **266**

17.1. Probabilidad, 266. 17.2. Tablas de defunción, 267. 17.3. Expectación, 268. 17.4. Acontecimientos mutuamente excluyentes, 271. 17.5. Acontecimientos independientes, 272. 17.6. Acontecimientos dependientes, 272. 17.7. La probabilidad en ensayos repetidos, 275.

XVIII. Determinantes. **280**

18.1. Determinantes del orden dos, 280. 18.2. Determinantes del orden tres, 282. 18.3. Determinantes de cualquier orden, 286. 18.4. Propiedades de las determinantes, 287. 18.5. Expansión de una determinante por menores, 289. 18.6. Aplicación a la solución de ecuaciones lineales, 293. 18.7. Ecuaciones inconsistentes y dependientes, 295. 18.8. Sistemas lineales con más ecuaciones que incógnitas, 297. 18.9. Ecuaciones homogéneas, 298.

XIX. Fracciones parciales. **302**

19.1. Fracciones parciales, 302. 19.2. Caso 1. Los factores del denominador son lineales, ninguno está repetido, 303. 19.3. Caso 2. Los factores del denominador sin lineales, algunos están repetidos, 304. 19.4. Caso 3. Los factores del denominador son cuadráticos, ninguno está repetido, 305. 19.5. Caso 4. Los factores del denominador son cuadráticos, algunos de ellos se repiten, 306.

XX. Series infinitas. 309

20.1. Secuencias y series, 309. 20.2. Límite, 310. 20.3. Convergencia y divergencia, 311. 20.4. Condición indispensable para la convergencia, 312. 20.5. Suposición fundamental, 313. 20.6. Prueba de comparación, 313. 20.7. Series útiles para comparación, 315. 20.8. Prueba de proporción, 315. 20.9. Serie de términos negativos, 320. 20.10. Series alternantes, 321. 20.11. Convergencia absoluta y condicional, 323. 20.12. Extensión de la prueba de proporción, 325. 20.13. Series de potencias, 326.

Tablas 331

Indice 343

Respuestas a los ejercicios de numeración impar 349

ALGEBRA

[illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

CAPITULO I

Revisión del álgebra elemental

1.1. Introducción.

El álgebra se ocupa de números y de las operaciones que con ellos se efectúan. La característica principal de la álgebra, que la diferencia de la aritmética, es el empleo de letras que representan números. Un número que se representa por una letra se llama *número literal*. Puesto que una letra, como x o a, puede representar diferentes números, según las circunstancias, un número literal se llama a veces un *número general*.

El producto de dos números literales, por ejemplo, a y b, se escribe generalmente ab, sin signo de multiplicación aunque pueda escribirse también $a \times b$ o $a \cdot b$. De la misma manera, el producto de un número aritmético, como 3 y un número literal, como x, se escribe generalmente $3x$.

Enunciaremos en este capítulo algunas reglas fundamentales de la álgebra y recordaremos algunos principios que resultan de ellas. Se dan ejemplos que ilustran la aplicación de estos principios y se presentan ejercicios que permitirán al estudiante revisar varias técnicas de manipulación algebraica.

1.2. Operaciones fundamentales.

Las operaciones fundamentales de la álgebra son la adición, la sustracción, la multiplicación y la división.

Sustraer b de a es encontrar un número c tal que $a = b + c$.

Dividir a por b es encontrar un número c tal que $a = bc$. (El número c se llama el cociente de a dividido por b.)

La división por cero no puede definirse concretamente de manera a dar un resultado único. En caso de que cualquier número a (diferente de cero) se divida entre cero y el resultado fuese c (por ejemplo, si $a \div 0$ fuese c), esto nos daría $a = 0c = 0$, lo que contradice la hipótesis de que a es distinto de cero.

Por otro lado, en caso de que el número a fuera cero y que tratásemos de asignar un valor c al cociente $0 \div 0$, nos daría $0c = 0$, y c podría ser el número que sea.

Es posible, sin embargo, dividir cero por cualquier número que no sea cero. De hecho, $0 \div b = 0$, a condición de que $b \neq 0$. (El símbolo $\neq$ quiere decir "no es igual a" o "es diferente de".)

Excluyendo las excepciones que acabamos de anotar, cada una de las cuatro operaciones fundamentales es siempre posible y dará siempre un resultado único.

1.3. Reglas fundamentales.

Damos a continuación algunas de las reglas fundamentales:

La suma de dos números es siempre la misma, sin importar el orden en el cual se suman. Es decir:

$$a + b = b + a$$

Es la *ley conmutativa* de la adición.

La suma de tres o más números es la misma sin importar la manera con la cual se agrupan los números. Así:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b.$$

Es la *ley asociativa* de la adición.

El producto de dos números es el mismo sin importar el orden en el cual se multiplican. Es decir:

$$ab = ba$$

Es la *ley conmutativa* de la multiplicación.

El producto de tres o más números es el mismo sin importar la manera con que se agrupan los números. Así:

$$abc = (ab)c = a(bc) = (ac)b.$$

Es la *ley asociativa* de la multiplicación.

El producto de un número y la suma de otros números es el mismo que la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada uno de los otros números por el primer número. Con símbolos:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Es la *ley distributiva* de la multiplicación en cuanto a adición.

Otras reglas fundamentales forman los axiomas siguientes:

Las cantidades iguales a las mismas cantidades o a cantidades iguales son iguales entre sí.

Cuando se suman iguales cantidades a iguales cantidades, las sumas son iguales.

Cuando se restan iguales cantidades de cantidades iguales, los saldos son iguales.

Cuando se dividen cantidades iguales entre cantidades iguales los cocientes son iguales.*

Una cantidad puede sustituirse por su equivalente en cualquier expresión algebraica.**

1.4. Números con signos.

En el núm. 1.1 notamos una diferencia esencial entre el álgebra y la aritmética. Otra diferencia entre los dos sistemas consiste en que la aritmética se ocupa solamente de números positivos mientras que la álgebra trata tanto de números positivos como de números negativos (además de ciertos otros tipos nuevos).

Los números negativos se presentan muy naturalmente y son convenientes al ocuparse de cantidades que son opuestas en carácter. Así: el haber puede considerarse como una cantidad positiva mientras el pasivo o las deudas como cantidades negativas. Las temperaturas arriba de cero se llaman positivas, y las que están bajo cero son negativas. El estudiante puede encontrar otros ejemplos con facilidad.

Los números positivos y negativos se llaman a veces *números con signos*, es decir números precedidos de un signo más $(+)$ o de un signo menos $(-)$. En consecuencia, los símbolos $+$ y $-$ pueden emplearse en álgebra para indicar si una cantidad es positiva o negativa y además para identificar las operaciones de adición y sustracción. Cuando es preciso distinguir entre los signos $+$ y $-$ que representan cantidades positivas y negativas y los signos $+$ y $-$ que implican operaciones, podemos encerrar las cantidades, con sus signos, entre paréntesis. Así: $(+8) + (-5)$ indica que se tiene que agregar un 5 negativo a un 8 positivo; $(-3) - (+4)$ quiere decir que un 4 positivo debe de sustraerse de un 3 negativo.

Cuando no hay signo alguno delante del número, debe suponerse el signo $+$.

* Excluyendo la división por cero. Ver núm. 1.2.

** Ver núm. 1.6.

El *valor absoluto* de un número positivo, o de cero, es el número mismo. El valor absoluto de un número negativo se obtiene cambiando el signo del número. Así: el valor absoluto de tanto $+5$ como de -5 es 5 (es decir, $+5$). El símbolo que indica el valor absoluto es $|\ \ |$; por lo tanto, $|-3| = 3$.

1.5. Operaciones con números con signos.

Se emplean ciertas reglas o leyes cuando se opera con números precedidos de signos. Al igual que las reglas fundamentales núm. **1.3**, deben tomarse como axiomas. Sin embargo, podrían comprobarse, sobre la base de axiomas más fundamentales aún, en un tratado más avanzado del sistema de números. Nos llevan a resultados consistentes y su aplicación nos permite obtener resoluciones correctas y útiles de problemas prácticos. Damos a continuación las leyes para las cuatro operaciones fundamentales.

Para sumar dos números de signos iguales (por ejemplo: ambos con $+$ o con $-$), sumar sus valores absolutos y poner el signo común antes del resultado.

Para sumar dos números de signos diferentes, sustraer el valor absoluto más pequeño del más grande y poner el signo del número con el más grande valor absoluto antes del resultado.

Ejemplos de adiciones:

$$\begin{array}{r}+7\\+3\\\hline+10\end{array}\qquad\begin{array}{r}+7\\-3\\\hline+4\end{array}\qquad\begin{array}{r}-7\\+3\\\hline-4\end{array}\qquad\begin{array}{r}-7\\-3\\\hline-10\end{array}$$

Para sustraer un número con signo de otro, cambiar el signo del número que debe sustraerse y proceder como en la adición.

Ejemplos de sustracciones:

$$\begin{array}{r}+7\\+3\\\hline+4\end{array}\qquad\begin{array}{r}+7\\-3\\\hline+10\end{array}\qquad\begin{array}{r}-7\\+3\\\hline-10\end{array}\qquad\begin{array}{r}-7\\-3\\\hline-4\end{array}$$

Para multiplicar dos números con signos, multiplicar sus valores absolutos. Cuando los números tienen signos iguales anteponer el signo más al producto; cuando tienen signos desiguales, anteponer el signo menos al producto.

Ejemplos de multiplicaciones:

$$\begin{array}{r}+7\\ +3\\ \hline +21\end{array}\qquad \begin{array}{r}+7\\ -3\\ \hline -21\end{array}\qquad \begin{array}{r}-7\\ +3\\ \hline -21\end{array}\qquad \begin{array}{r}-7\\ -3\\ \hline +21\end{array}$$

Para dividir un número con signo por otro, dividir el valor absoluto del primero por el valor absoluto del segundo. Cuando los números tienen signos iguales anteponer un signo más al cociente; cuando tienen signos desiguales, anteponer un signo menos al cociente.

Ejemplos de divisiones:

$$(+21) : (+3) = +7 \qquad (+21) : (-3) = -7$$

$$(-21) : (+3) = -7 \qquad (-21) : (-3) = +7$$

EJERCICIOS 1. A

Sumar:

1. $\begin{array}{r}+8\\ \underline{+5}\end{array}$	2. $\begin{array}{r}+9\\ \underline{-4}\end{array}$	3. $\begin{array}{r}-7\\ \underline{+5}\end{array}$	4. $\begin{array}{r}-13\\ \underline{-2}\end{array}$	5. $\begin{array}{r}-5\\ \underline{-15}\end{array}$
6. $\begin{array}{r}+32\\ \underline{+27}\end{array}$	7. $\begin{array}{r}-1\\ \underline{+17}\end{array}$	8. $\begin{array}{r}+3\\ \underline{-3}\end{array}$	9. $\begin{array}{r}-10\\ \underline{+6}\end{array}$	10. $\begin{array}{r}-20\\ \underline{-20}\end{array}$
11. $\begin{array}{r}-45\\ \underline{+45}\end{array}$	12. $\begin{array}{r}+16\\ \underline{-32}\end{array}$	13. $\begin{array}{r}+8\\ \underline{0}\end{array}$	14. $\begin{array}{r}-8\\ \underline{0}\end{array}$	15. $\begin{array}{r}-66\\ \underline{-82}\end{array}$
16. $\begin{array}{r}0\\ \underline{+14}\end{array}$	17. $\begin{array}{r}0\\ \underline{-20}\end{array}$	18. $\begin{array}{r}0\\ \underline{0}\end{array}$	19. $\begin{array}{r}+2.5\\ \underline{-0.8}\end{array}$	20. $\begin{array}{r}-8.7\\ \underline{-9.3}\end{array}$

21-40. Sustraer el número inferior del número superior en los mismos ejercicios 1-20.

41-60. Dar los productos de los números citados en los ejercicios 1-20.
Dar, siempre que sea posible, los cocientes de los siguientes pares de números. (La división está indicada bajo forma de fracción.)

61. $\dfrac{+20}{+4}$	62. $\dfrac{+16}{-4}$	63. $\dfrac{-21}{+7}$	64. $\dfrac{-32}{-8}$	65. $\dfrac{+119}{+17}$
66. $\dfrac{-96}{-8}$	67. $\dfrac{-15}{+15}$	68. $\dfrac{+44}{-44}$	69. $\dfrac{-82}{-82}$	70. $\dfrac{+1.2}{+0.3}$
71. $\dfrac{0}{+75}$	72. $\dfrac{0}{-75}$	73. $\dfrac{+10}{0}$	74. $\dfrac{-11}{0}$	75. $\dfrac{0}{0}$

1.6. Expresiones algebraicas.

Un símbolo o una combinación de símbolos representando un número pueden llamarse una *expresión*. Cuando las únicas operaciones involucradas en la expresión son las de adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencias (ver núm. 1.7) y extracción de raíces (ver núms. 5.2 y 5.3), la expresión es una *expresión algebraica*. Por ejemplo:

$$3ab - \frac{5c^2}{a} + \sqrt{d}$$

es una expresión algebraica. (Los significados de los símbolos c^2 y $\sqrt{d}$ han de ser comprendidos por los que han estudiado álgebra elemental; se explicarán en los párrafos mencionados.)

Cuando una expresión se compone de partes ligadas por los signos más o menos, cada parte, considerada con el signo que la precede inmediatamente (se entiende por $+$ cuando no hay ningún signo escrito), se llama un *término*. La expresión indicada en el párrafo anterior se compone de tres términos.

Cuando una expresión se compone de partes que se multiplican entre sí, cada una de estas partes, o el producto de ellas, se llama un *factor* de la expresión.

Cualquier factor de un término se llama el *coeficiente* del factor remanente. El coeficiente de la parte literal de un término es el *coeficiente numeral* del término. Por ejemplo, en el término $5axy$, $5a$ es el coeficiente de xy, y el número 5 es el coeficiente numérico del término.

El signo se incluye en el coeficiente. Así, en la expresión $-3a$, el coeficiente de a es -3.

Cuando no se indica ningún coeficiente numérico, se entiende que se trata de 1. Así, el coeficiente de x es 1; el coeficiente de $-y$ es -1.

1.7. Exponentes.

La expresión a^3 quiere decir $a \cdot a \cdot a$. Es decir que indica la tercera potencia de a. El número 3 se llama el *exponente* de la potencia. El número a puede llamarse la base. En general, a^n quiere decir $a \cdot a \cdots$ por n factores y se llama la enésima potencia de a.

Cuando no se indica ningún exponente, se entiende que es 1. Así, en la expresión $5a^2bc^3$ el exponente de b es 1.

1.8. Adición y sustracción de términos similares.

Por términos *similares* o *iguales*, queremos decir números como $3a$ y $8a$, o $5x^2y^4$ y $-7x^2y^4$, que son productos de las mismas letras con los

mismos exponentes. Los coeficientes numéricos pueden o no ser los mismos.

Para sumar o restar términos similares, sumar o restar sus coeficientes. Se obtendrá así el coeficiente de la suma o de la diferencia, que será similar a los términos sumados o restados.

Ejemplos de adición:

$$\begin{array}{r} 10x \\ 3x \\ \hline 13x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5a^2b \\ -3a^2b \\ \hline 2a^2b \end{array} \qquad \begin{array}{r} -7x^2 \\ x^2 \\ \hline -6x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -4abc \\ -4abc \\ \hline -8abc \end{array}$$

Ejemplos de sustracción:

$$\begin{array}{r} 10x \\ 3x \\ \hline 7x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5a^2b \\ -3a^2b \\ \hline 8a^2b \end{array} \qquad \begin{array}{r} -7x^2 \\ x^2 \\ \hline -8x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -4abc \\ -4abc \\ \hline 0 \end{array}$$

EJERCICIOS 1. B

Sumar:

1. $\begin{array}{r} 13a \\ 9a \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 13a \\ -9a \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 4x^3 \\ 7x^3 \\ \hline \end{array}$ 4. $\begin{array}{r} -7xy \\ 5xy \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} -32z^2 \\ -17z^2 \\ \hline \end{array}$ 6. $\begin{array}{r} -27abc \\ -72abc \\ \hline \end{array}$ 7. $\begin{array}{r} 16mn^2 \\ -3mn^2 \\ \hline \end{array}$ 8. $\begin{array}{r} -2xyz \\ -2xyz \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} -4u^3v^2 \\ -9u^3v^2 \\ \hline \end{array}$ 10. $\begin{array}{r} -20r^2s \\ -19r^2s \\ \hline \end{array}$ 11. $\begin{array}{r} 30cx \\ -30cx \\ \hline \end{array}$ 12. $\begin{array}{r} 0 \\ -6abc \\ \hline \end{array}$

13. $\begin{array}{r} -15t^2w^3 \\ -42t^2w^3 \\ \hline \end{array}$ 14. $\begin{array}{r} 0.3z^3 \\ 2.8z^3 \\ \hline \end{array}$ 15. $\begin{array}{r} 75a^2 \\ -19a^2 \\ \hline \end{array}$

16-30. Sustraer el número inferior del número superior en los ejercicios 1-15.

1.9. Multiplicación de términos.

El producto de a y a es a^2. Similarmente,

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5.$$

En general,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Es decir, que para multiplicar las potencias de la misma base, sumar los exponentes de las potencias para obtener el exponente que se ha de emplear con el producto.

Notar que no podemos multiplicar a^2 y b^3, por ejemplo, salvo para anotar el producto como a^2b^3.

Para multiplicar términos, multiplicar sus coeficientes numéricos para obtener el coeficiente numérico del producto. Multiplicar las partes literales como se ha explicado antes. (Las reglas de signos para la multiplicación de números con signos siguen teniendo validez.)

Ejemplos:

$3a \cdot 5b = 15ab \qquad (-2a^2) \cdot (-7a^3) = 14a^5$

$3x^2 \cdot 4y^3 = 12x^2y^3 \qquad 8ab^2c^3 \cdot (-3abd^4) = -24a^2b^3c^3d^4.$

1.10. Potencias de los términos.

Elevar a una potencia es sencillamente una multiplicación continua. Así:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{3\cdot 2} = a^6,$$

y, en general,

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

suponiendo que m y n son números enteros positivos.

También,

$$a^3 \cdot b^3 = (ab)^3.$$

y, en general,

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m,$$

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m \cdot \cdot \cdot = (abc \cdot \cdot \cdot)^m.$$

Ejemplos:

$$(a^3)^4 = a^{12} \qquad (3x^3)^2 = 9x^6$$

$$(-2x^4)^4 = 16x^{16} \qquad (-4a^2b^3)^3 = -64a^6b^9$$

$$(3x^3y)^2 \cdot (2xy^2)^2 = (3x^3y \cdot 2xy^2)^2 = (6x^4y^3)^2.$$

1.11. División de términos.

Puesto que $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$, se entiende que, a la inversa,

$$a^5 \div a^3 = a^{5-3} = a^2$$

En general,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

donde, de momento, asumimos que m es más grande que n. Es decir: para dividir potencias de la misma base, sustraer el exponente del divisor del exponente del dividendo para obtener el exponente que ha de emplearse con el cociente.

Para dividir términos, dividir el coeficiente numérico del dividendo por el coeficiente del divisor de manera a obtener el coeficiente numérico del cociente. Dividir las partes literales de los números tal como se explicó antes. (Las reglas de signos para la división de números con signos siguen teniendo validez.)

Ejemplos:

$$8a^8 \div 2a^2 = 4a^6 \qquad -12x^2 \div 2x^2 = -6$$
$$28a^2b^3 \div (-7ab^3) = -4a \qquad -32xy^3z^5 \div (-4xyz^2) = 8y^2z^3.$$

EJERCICIOS 1. C

Dar los productos siguientes:

1. $8a \cdot 2x$.
2. $-3x \cdot 6y$.
3. $7p \cdot (-9q)$.
4. $-5x \cdot (-16y)$.
5. $3a \cdot 7a$.
6. $8a \cdot 15a^2$.
7. $-4a^2 \cdot 3a^4$.
8. $3x^2 \cdot 3x^2$.
9. $5xy \cdot 10xy^2$.
10. $3r^2s \quad (-7rs^2)$.
11. $9xt^2 \cdot 3x^2t^2$.
12. $8x^2 \cdot 2y^3$.
13. $-5a^2b^2 \cdot (-6ab^2c)$.
14. $8uv \cdot 9vw$.
15. $7x^2y^3 \cdot 7yz^3$.
16. $-17xy^2z^3 \cdot 3x^2y^2z$.
17. $22a^2x^3y \cdot 21ax^3y^3$.
18. $a \cdot 3ab \cdot 20abc$.
19. $32axy \cdot 8bxy$.
20. $4ab \cdot (-6a^2b^3c^4) \cdot bcd$.
21. $(-3uv)(-2u^2v^3)(-9v^4)$.
22. $-2a^2b \cdot (-3a^3b)(-4a^4b)$.
23. $12m^2n^2 \cdot (-2mns)(-3s^2t^4)$.
24. $-11x^3y \cdot (-9xy^2z)(-4yz^2)$.

Dar las potencias siguientes:

25. $(x^2)^3$.
26. $(2x^2)^2$.
27. $(3a^3)^3$.
28. $(-4x^3)^3$.
29. $(a^2b^2)^4$.
30. $(-2a^2b)^3$.
31. $(-3r^2s^3)^4$.
32. $(5x^3)^6$.
33. $(10x^{10})^3$.
34. $(-8a^2x^3)^3$.
35. $(9m^3n^3)^3$.
36. $(4x^4)^4$.

Dar los productos siguientes:

37. $5a^2b^2 \cdot (2ab^2c^3)^3$.
38. $(4x^2y^2z)^2 \cdot 7xy^2z^3$.
39. $(-2u^2v^2)^3 \cdot (5u^3v)^3$.
40. $(-2x^3)^3 \cdot (-5x^2)^2$.
41. $(-7x^3y^4z^2 \cdot 3xy^2z^3)^2$.
42. $(7x^4y^4z^2)^2 \cdot (2xyz)^3$.
43. $(-5uv^4)^4 \cdot (4u^3v^2)^3$.
44. $(-3p^2q^3)^4 \cdot (-p^3q^2)^3$.
45. $(2xy)^2 \cdot (-3x^2y^3)^4 \cdot (-5x^3y^4)^2$.
46. $(-3ab^2c^3)^4 \cdot (-4a^2b^3c^4)^3 \cdot (-5a^3b^4c^3)^2$.

Dar los siguientes cocientes:

47. $a^4 \div a^3$.
48. $6x^6 \div 3x^2$.
49. $14x^5 \div (-2x^2)$.
50. $-50a^8 \div 25a^6$.
51. $-36t^2 \div (-9t)$.
52. $6m^6 \div 2m^3$.
53. $72x^6y^4z^4 \div 18xy^2z^2$.
54. $13u^5v^6w^7 \div uv^2w^7$.
55. $(3a^2b^3c^4)^7 \div (3a^2b^3c^4)^4$.
56. $(-7x^2y)^9 \div (7x^2y)^7$.
57. $6m^3n^5 \cdot 2m^2n^3 \div (-4mn^6)$.
58. $(2abc^2)^5 \cdot (-3a^2bc)^4 \div (12a^2b^2c)^2$.
59. $(-27x^2y^3)^2 \cdot (-5x^2y^4z^6)^3 \div (-3xyz)^5$.
60. $(25x^3y^4z^5)^{10} \cdot (-25x^3y^4z^5) \div (-25x^3y^4z^5)^{11}$.

1.12. Símbolos de grupos.

Frecuentemente, es conveniente agrupar algunos términos de manera a indicar que deben considerarse como un solo número. Los símbolos que se emplean para este fin son: los *paréntesis* ( ), los *corchetes* [ ], las *llaves* { } y el *vínculo* ——.

Cuando una expresión que se compone de una suma de términos * está encerrada dentro de símbolos de grupos precedidos por un signo más, los símbolos pueden quitarse sin que cambie el valor de la expresión.

Ejemplo:

$$3a + (b - 5) = 3a + b - 5.$$

Una expresión compuesta de una suma de términos puede siempre encerrarse dentro de símbolos de grupo precedidos por un signo más, el signo de cada término debe conservarse.

Ejemplo:

$$x - y + z = x + (-y + z).$$

Cuando una expresión compuesta de una suma de términos está encerrada dentro de símbolos de grupo precedidos de un signo menos, los símbolos pueden quitarse a condición de cambiar el signo de cada término.

Ejemplo:

$$4x - (3y - z + 2) = 4x - 3y + z - 2.$$

Una expresión compuesta de una suma de términos puede encerrarse

* En álgebra, una expresión como $4a - 3b - c + 7d$ se llama una suma aunque se componga de sustracciones y de adiciones, puesto que la sustracción de un número es equivalente a la adición de la negación del número.

dentro de símbolos de grupo precedidos de un signo menos, a condición de cambiar el signo de cada término encerrado.

Ejemplos:

$$a + b - c = a - (-b + c)$$
$$x - y - z = x - (y + z)$$

Una cantidad que multiplica o divide una expresión entre símbolos de grupo multiplica o divide cada término encerrado dentro de los símbolos.

Ejemplos:

$$4x + 2(5y - 3z) = 4x + 10y - 6z,$$
$$4x - 2(5y - 3z) = 4x - 10y + 6z.$$

Esto es sencillamente la ley distributiva de la multiplicación considerada respecto a la adición (ver núm. 1.3). La regla que se refiere al cambio de signos cuando se quitan los símbolos de grupo precedidos por un signo menos es un caso especial, puesto que el signo menos es equivalente al multiplicador -1.

Las reglas anteriores se aplican cuando los símbolos de grupo están incluidos dentro de otros símbolos similares. Al quitar los símbolos de grupo existe generalmente menos probabilidad de equivocarse cuando los símbolos interiores se quitan en primer lugar, aunque haciendo la operación con cuidado, pueden quitarse en el orden que sea. Los términos similares deben combinarse en cada etapa.

Ejemplos:

$$7a - [6b - (c - d) + e] = 7a - 6b + (c - d) - e$$
$$= 7a - 6b + c - d - e$$

$$3a - \{b + 2[x - 4y - (c - d)] - 5\}$$
$$= 3a - \{b + 2[x - 4y - c + d] - 5\}$$
$$= 3a - \{b + 2x - 8y - 2c + 2d - 5\}$$
$$= 3a - b - 2x + 8y + 2c - 2d + 5.$$

La exactitud de las operaciones en un ejemplo como el que antecede puede ser revisada, aunque no comprobada, al asignar valores numéricos a las cantidades literales y comparando el valor de la expresión original con la forma final.* No asignar los valores 0 o 1 a ninguna de las letras.

* Ver el último párrafo del capítulo 1.15.

Así, en el primer ejemplo del último par, fijamos que $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, $e = 6$. Encontramos:

$$\begin{aligned} 7a - [6b - (c - d) + e] &= 7 \cdot 2 - [6 \cdot 3 - 4 - 5 + 6] \\ &= 14 - [18 + 1 + 6] \\ &= 14 - 25 = -11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7a - 6b + c - d - e &= 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 + 4 - 5 - 6 \\ &= 14 - 18 + 4 - 5 - 6 = -11. \end{aligned}$$

EJERCICIOS I. D

Suprimir los símbolos de grupo y combinar los términos iguales:

1. $8 - [7 - (3 - 5) + (10 - 4)]$.
2. $15 - 2[5 - 3(13 - 9) + 11]$.
3. $10a - [3a + 2(b - 3c) - 6]$.
4. $3x + 2[5x - 6y - (x + y - z)]$.
5. $a(b + c - d) - b(a - c + d)$.
6. $2\{7a^2 - [a^2 + b^2 - (3a^2 + b^2 - 5)] + c^2 + 6\}$.
7. $3(a - 5b) - \{7a - [3(a - \overline{b - 2}) + 4]\}$.
8. $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$.
9. $x(x - 4) + 8\{3x - 2x[x + 5y - (3x - \overline{x - 2})]\}$.
10. $9\{a - [2b - 7(a - c)]\} - 6[3(a - b) - 4(a - c)]$.

Encerrar los últimos tres términos de las expresiones siguientes entre paréntesis precedidas de un signo menos:

11. $a - 2b - 3c - 4d$.
12. $3x - y + z - 10$.
13. $5p + 6q - 7r + 8s$.
14. $m^2 + n^2 + 3mn - 2m - 4n$.
15. $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$.
16. $4a^2 - 9b^2 - 12bc - 4c^2$.

Encerrar el coeficiente de x entre paréntesis precedidas de un signo más:

17. $ax - bx + 3x$.
18. $ax - bx + 3$.
19. $x + ax + bx - cx$.
20. $2x - 4ax + 3xy$.
21. $-3xy + y^2 - 5x + 7y + 4$.
22. $xy^2 + xz - 3x + 10y - 11$.

Dar el valor de cada una de las expresiones siguientes por los valores dados de los números literales involucrados:

23. $5(2x - 3y + 7) - 4\{x - 2y[2x - 3 + 4(1 - x)] - xy\}$; $x = 2$; $y = 3$.
24. $10\{7a - [6(a - \overline{2b - 3}) + 4ab]\}$; $a = a = -6$, $6 = -7$.
25. $8\{a - [3b - 5(a - 2c)]\} - 7[4(a - b) - 3(a - c)]$; $a = 3$; $b = -2$; $c = 5$.

26. $5\{2a - b + c - 3[2a - |b - c| - 2(a - c)]\}$; $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$.

27. $x^3 - y(x - z)[3x - 2(y - z)^2 - 7x^3y^2z]$; $x = 4$; $y = -3$; $z = 7$.

1.13. Polinomios.

Una expresión compuesta de un solo término es un *monomio*, una expresión compuesta de dos términos es un *binomio*, una expresión compuesta de tres términos es un *trinomio*.

Una expresión compuesta de más de tres términos es un *polinomio* o un *multinomio*.

NOTA. La palabra "polinomio" se limita, a veces, para designar una expresión como:

$$5x^3 + 3x^2 - 4x + 9,$$

que se compone de un integral positivo (es decir, un número entero positivo) con potencias de un número literal o de números literales (ver núm. 3.1). En este caso limitado, es a veces conveniente clasificar un monomio como un polinomio.

1.14. Adición y sustracción de polinomios.

Los polinomios se suman o se sustraen al combinar términos similares.

Ejemplo 1:

Agregar $3a - 2b + c^2$ y $4a + 6b - 9c^2$.

RESOLUCIÓN. Arreglar las expresiones de manera que los términos similares estén alineados en forma vertical. Después, agregar como en el núm. 1.8.

$$\begin{array}{r} 3a - 2b + c^2 \\ 4a + 6b - 9c^2 \\ \hline 7a + 4b - 8c^2 \end{array}$$

Ejemplo 2:

Sustraer $3a - 2b + 5d$ de $5a + 7b - 8c$.

RESOLUCIÓN. Arreglar las expresiones de manera que los términos similares estén alineados en forma vertical, colocando la expresión por sustraer debajo de la otra expresión. Después, sustraer como en el núm. 1.8.

$$\begin{array}{rrrr} 5a + & 7b - & 8c & \\ 3a - & 2b & & + 5d \\ \hline 2a + & 9b - & 8c & - 5d \end{array}$$

EJERCICIOS 1. E

Sumar los polinomios siguientes:

1. $16a + 9b,\ 8a + 7b.$
2. $21x - 30y,\ 19x + 20y.$
3. $x^3 - 3x^2 + 7x + 2,\ 5x^3 + x^2 - 10x + 24.$
4. $-3a + 7b - 31c,\ 6a - 14b - 44c.$
5. $7a^2b + 3ab^2,\ 12a^2b - 18ab^2 - a^2b^2.$
6. $3x^4 + 5x^3 - 7x + 2,\ x^3 + 2x^2 + 7x - 11.$
7. $5x^3 - 6x^2 - 3x + 4,\ 5x^3 + 6x^2 + 3x - 4.$
8. $x^3 - 11x^2 + 22x - 14,\ 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10.$
9. $ab + bc + cd,\ ac + bc + bd.$
10. $27ab^2 + 41b^2c^3 + 28c^3d^4,\ 24ab^2 - 57b^2c^3 - 22c^3d^4.$
11. $3p^2 - 2pq + 17q^2,\ 2q^2 - 18qp - 5p^2.$
12. $3a^3b^2c^2 - 32a^2b^3c^2 - 24ab^4c^2 + 18abc^5,$
    $8a^3b^2c^2 + 50a^2b^3c^2 - 66ab^4c^2 - 68abc^5.$
13. $7a^2 + 3b^2 - 5c^2 + x^2 - 5y^2 - 6z^2,$
    $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4a^2 - 8b^2 + 9c^2.$
14. $6a + b - 4c,\ 3a - 6b - 5c,\ -7a - 3b + 4c.$
15. $x^3 - 64x^2 - 99x + 18,\ 5x^3 + 9x^2 - 14,\ 4x^3 - 4x^2 - 75x - 6.$
16. $4a + 3b + 2c,\ 6b - 8c - 7d,\ 14c - 18d - 11e.$
17. $p - q,\ q - r,\ r - s,\ s - t,\ t - p.$
18. $x - a,\ x + a,\ a - x,\ a + x.$
19. $21m^2n - 31mn^2,\ 18mn^2 + 22m^2n,\ m^2 + n^2.$
20. $32x^3 + 53x^2y - 73xy^2,\ 5x^2y - 71xy^2 + 26y^3,\ x^3 - y^3.$

21-40. Sustraer la segunda expresión de la primera en los ejercicios 1-20.

41. *Sustraer* $5x^2 - 17xy + 22y^2$ de 0.
42. Sustraer $x^3 - 3x^2 + 7x + 4$ de 1.
43. Sustraer la suma de

$$13a + 22b - 81c \ \text{ y } \ 25a - 18b + c$$
$$\text{de } \ 10a - 20b + 35c.$$

44. Sustraer $42x^2 + 68y^2 + 72z^2$ de la suma de

$$86x^2 - 37z^2 \quad \text{y} \quad 51y^2 + 94z^2$$

45. Sustraer la suma de

$$x^3 + 17x^2 + 36x - 15 \ \text{ y } \ 3x^2 - 13x + 33$$

de la suma de

$$-2x^3 - 8x^2 + 79x + 8 \ \text{ y } \ 5x^3 - 73x^2 + 99x + 67.$$

1.15. Multiplicación de polinomios.

Para multiplicar un polinomio por un monomio, multiplicar cada término del polinomio por el monomio.

Para multiplicar un polinomio por otro, multiplicar cada término del primero por cada término del otro. Combinar los términos similares.

Ejemplo:

Multiplicar $2a^2 - 3ab + b^2$ por $a^2 + 2ab - 5b^2$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{rrrrr}
2a^2 & - 3ab & + b^2 & & \\
a^2 & + 2ab & - 5b^2 & & \\
\hline
2a^4 & - 3a^3b & + a^2b^2 & & \\
 & 4a^3b & - 6a^2b^2 & + 2ab^3 & \\
 & & - 10a^2b^2 & + 15ab^3 & - 5b^4 \\
\hline
2a^4 & + a^3b & - 15a^2b^2 & + 17ab^3 & - 5b^4
\end{array}$$

REVISIÓN. Suponiendo $a = 3$, $b = 2$.

$$\begin{array}{r}
2a^2 - 3ab + b^2 = 18 - 18 + 4 = 4 \\
a^2 + 2ab - 5b^2 = 9 + 12 - 20 = 1 \\
\hline
\text{Producto: } 4
\end{array}$$

$$2a^4 + a^3b - 15a^2b^2 + 17ab^3 - 5b^4 = 162 + 54 - 540 + 408 - 80 = 4.$$

La primera línea debajo de la primera regla horizontal, es decir: $2a^4 - 3a^3b + a^2b^2$, es el producto de a^2 y $2a^2 - 3ab + b^2$, etc... Los términos similares, como $-3a^3b$ y $4a^3b$, se han colocado en columnas y se han sumado. Esto está permitido, puesto que el orden con el cual se suman los números no tiene importancia.

La operación puede revisarse algebraicamente multiplicando con multiplicador y multiplicando intercambiados, o dividiendo (ver la sección siguiente) el producto por cualquiera de los polinomios para obtener el otro. La revisión por sustitución de números no prueba que la operación algebraica esté correcta. Cuando los números coinciden, es probable que la operación sea correcta; por otro lado, cuando los números no coinciden, hay con toda seguridad algún error.

EJERCICIOS I. F

Dar los productos de los polinomios siguientes:

1. $3x^2 + 6x - 5$, $x + 7$.
2. $8x^2 - 7x - 9$, $x - 5$.
3. $6x^2 - x + 12$, $3x - 5$.

4. $9x^2 - 4x - 3$, $7x + 8$.
5. $x^2 + 9x + 10$, $x^2 + x + 4$.
6. $2a^2 - 3a + 5$, $3a^2 + 15a + 20$.
7. $5x^2 - 8xy + 2y^2$, $x^2 - 2xy + 3y^2$.
8. $a + b - c$, $a - b + c$.
9. $2a - 3b - 8c$, $4a + 7b - 3c$.
10. $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$, $2x - 5$.
11. $7x^3 - 2x^2 - 8x + 11$, $x^2 - 4x + 3$.
12. $2x^3 - x^2y + y^3$, $3x^2y - 4xy^2 + 5y^3$.
13. $2x^4 - 3x^2 + 5x - 4$, $2x^3 - 5x - 1$.
14. $2x^2 - x^3 - 4x + 5$, $3x - 2x^2 + 7$.

Sugestión. Volver a arreglar ambas expresiones de acuerdo con las potencias descendientes de x.

15. $10x^2 - 3x^3 - 4x - 3$, $x^3 - 2x^2 - 5$.
16. $x - x^3 - x^2 + 9$, $2x^2 + 7x - 8$.
17. $x - 2$, $2x + 3$, $x^2 - 7x + 6$.
18. $x^2 - 2x + 3$, $3x^2 - 4x - 7$, $x^2 + 5$.
19. $a^2 - 2ab - b^2$, $4a^2 - ab - 3b^2$, $9a^2 - 4ab - 2b^2$.

Cuadrado:

20. $3a^2 - 2b^2$.
21. $a + b + c$.
22. $2x^2 - 3x + 5$.
23. $x^2 - 2xy - 3y^2$.

Cubo:

24. $a + b$.
25. $x + 2y$.
26. $x^2 - 2y^2$.
27. $2x^2 + 5y^2$.

Resolver las operaciones indicadas:

28. $(a + b)^2(a - b)$.
29. $(3x + 2y)^2(2x - 3y)^2$.
30. $(x - y)^3(x + y)$.
31. $(a^2 - 2ab + 3b^2)(2a - b)^2$.

1.16. División de polinomios.

Para dividir un polinomio por un monomio, dividir cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo:

$$(6a^3b^2 - 12a^2b^3 - 3ab^4) : 3ab$$
$$= (6a^3b^2 : 3ab) - (12a^2b^3 : 3ab) - (3ab^4 : 3ab)$$
$$= 2a^2b - 4ab^2 - b^3.$$

El método para dividir un polinomio por otro está ilustrado por el ejemplo siguiente:

Ejemplo:

Dividir: $5x^2 - 2x^3 + 3$ por $x^2 - 4 - 2x$.

Resolución. Arreglar ambos polinomios de acuerdo con las potencias descendientes de x. La operación es como sigue:

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{-2x \;\; + \quad (= \text{Cociente})} \\
(\text{Divisor} =)\; x^2 - 2x - 4) & -2x^3 + 5x^2 \qquad\quad + 3 \;(= \text{Dividendo}) \\
 & \underline{-2x^3 + 4x^2 + 8x} \\
 & \qquad\qquad x^2 + 8x + 3 \\
 & \qquad\qquad \underline{x^2 + 2x - 4} \\
 & \qquad\qquad\quad - 6x + 7 \;(= \text{Remanente})
\end{array}
$$

Se ve que al dividir el primer término del divisor entre el primer término del dividendo, que el primer término en el cociente es $-2x$ (es decir, $-2x^3/x^2 = -2x$). Multiplicar el divisor $x^2 - 2x - 4$ por $-2x$, para obtener en polinomio $-2x^3 + 4x^2 + 8x$, que se escribe debajo del dividendo y se sustrae de él. Continuar el proceso hasta que el remanente es de menor grado * que el divisor.

La división puede comprobarse usando la relación:

$$\textit{Dividendo} = \textit{cociente} \times \textit{Divisor} + \textit{Remanente} \qquad (1)$$

sea algebraicamente o sustituyendo números. Un número que haga que el divisor sea igual a cero no debe emplearse (ver núm. 1.2).

Checaremos la división anterior atribuyendo a x el valor de 2 y encontramos:

Dividendo: $= 2x^3 + 5x^2 + 3 = -16 + 20 + 3 = 7.$
Divisor: $= x^2 - 2x - 4 = 4 - 4 - 4 = -4.$
Cociente: $= -2x + 1 = -4 + 1 = -3.$
Remanente: $= -6x + 7 = -12 + 7 = -5.$

Sustituyendo en la relación (1), obtenemos:

$$7 = -3(-4) - 5, \quad \text{o} \quad 7 = 7.$$

* El grado de un polinomio consistente en potencias integrales positivas (es decir, números enteros) de x es el exponente de la más alta potencia que ocurre en el polinomio. Así, el polinomio $2x^3 - 5x^2 + 4$ es del grado tres.

EJERCICIOS 1. G

Dividir el primer polinomio por el segundo.

1. $x^3 + 5x^2 - 8x - 12,\ x - 2.$
2. $x^3 - 11x - 6,\ x + 3.$
3. $12x^4 - 25x^3 + 18x^2 + 7x - 20,\ 3x - 4.$
4. $8x^4 - 20x^3 + 3x + 28,\ 4x^2 - 6x - 7.$
5. $a^3 - b^3,\ a - b.$
6. $a^3 + b^3,\ a + b.$
7. $a^3 - b^3,\ \mathrm{a} + b.$
8. $a^3 + b^3,\ a - b.$
9. $x^3 - 7x^2 + 2x + 4,\ x - 5.$
10. $6x^3 + 5x^2 - 2x - 8,\ 2x + 3.$
11. $x^4 + 5x^3 - 13x^2 + 10x - 8;\ x^2 + 7x + 3.$
12. $6x^4 - 11x^3 + 26x^2 - 7x + 7,\ 2x^2 - 3x + 7.$
13. $5x^4 - 13x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 - 7y^4,\ x^2 - 3xy + 2y^2.$
14. $6a^4 - 2a^3b - 15a^2b^2 - 12ab^3 - 5b^4,\ 3a^2 - 4ab + b^2.$
15. $a^4 - b^4,\ a + b.$
16. $a^4 - b^4,\ a - b.$
17. $a^4 - b^4,\ a^2 + b^2.$
18. $a^4 - b^4,\ a^2 - b^2.$
19. $a^4 + b^4,\ a + b.$
20. $a^4 + b^4,\ a - b.$
21. $a^5 + b^5,\ a + b.$
22. $a^5 - b^5,\ a - b.$
23. $x^5 - x^4 + x^2 - x + 2688,\ x + 7.$
24. $x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 7x + 8,\ x^2 - x - 2.$
25. $x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 2x + 18,\ x^2 - 3x + 2.$
26. $12x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 70x - 7,\ 3x^2 + x - 7.$
27. $8x^5 - 6x^4 - 11x^3 + 3x^2 + 17x + 15,\ 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2.$

Haga las operaciones siguientes:

28. $(x^3 + y^3) : (x + y)(x - y).$
29. $(x^4 - y^4) : (x + y)(x - y).$
30. $(x^6 - y^6) : (x + y)(x - y).$
31. $(x^6 + y^6) : (x + y)(x - y).$

1.17. Constantes y variables.

Un símbolo que, en el transcurso de una discusión, no cambia de valor se llama una *constante*. (Hay, desde luego, algunas constantes como 3, -2 y π, que nunca cambian de valor.)

Un símbolo que puede cambiar de valor durante una discusión se llama una *variable*.

En la fórmula para determinar la superficie de un triángulo,

$$A = \frac{1}{2}\, bh,$$

½ es una constante que nunca varía. Cuando en determinado problema consideramos solamente la base b del triángulo como valor fijo, entonces en este problema, b es una constante y la altura h y la superficie A son variables.

1.18. Funciones.

Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que para cada grupo de valores de una, corresponden una o más valores de la otra, la segunda variable se dice ser una *función* de la primera. La primera variable se llama la variable *independiente*, la segunda es una variable *dependiente*. Por ejemplo, si $y = x$, entonces y es una función de x, y podemos considerar x como la variable independiente e y como dependiente de x.

Esta clase de relación se escribe frecuentemente en la forma

$$f(x) = x^2$$

lo que puede leerse "la función f de x es igual a x^2" o, más rápidamente, "f de x igual a x^2". Cuando $f(x) = x^2$, entonces $f(a) = a^2$, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(-3) = (-3)^2 = 9$, etc...

En otro problema o discusión, podemos tener $f(x) = 2x + 3$ o $f(x) = 1/x$. Es decir, $f(x)$ no representa siempre la misma función de x. Tampoco f es la única letra que se emplea para representar funciones —podemos tener $F(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, etc...

La superficie de un círculo es obviamente una función de su radio y podemos escribir $A = f(r)$. En este caso sabemos la forma de la función, es decir, $f(r) = \pi r^2$. Igualmente, la arista de un cubo es una función de su volumen. Aquí $f(V) = \sqrt[3]{V}$.

Nota. Se supone que el estudiante está familiarizado con las ideas de raíces cuadradas, raíces cúbicas, etc... y con los símbolos correspondientes. Sin embargo, estos temas se tratarán más tarde en detalle.

Frecuentemente una variable es una función de dos o más otras variables. Por ejemplo, el volumen de un cono circular recto es una función de su base y de su altura, ya que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Lo que puede escribirse:

$$V = f(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Si el radio es 2 y la altura 3, tenemos:

$$V = f(2,3) = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 4\pi.$$

Ejemplo 1.

Suponiendo $f(x) = 2x^2 - 3x - 35$; dar $f(3x + 5)$.

Resolución. Reemplazar x en todas partes por $3x + 5$.

$$\begin{aligned} f(3x + 5) &= 2(3x + 5)^2 - 3(3x + 5) - 35 \\ &= 2(9x^2 + 30x + 25) - 3(3x + 5) - 35. \\ &= 18x^2 + 60x + 50 - 9x - 15 - 35 \\ &= 18x^2 + 51x \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Suponiendo $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$, $g(x) = x^2 - 2$; dar $f[g(x)]$.

Resolución. Reemplazar x, donde aparezca en $f(x)$, por $g(x)$, y simplificar.

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= \frac{[g(x)]^2}{1 + g(x)} = \frac{(x^2 - 2)^2}{1 + x^2 - 2} \\ &= \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

Suponiendo $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 9$; dar $f(x - 3, y + 2)$.

Resolución. Reemplazar x por $x - 3$ e y por $y + 2$.

$$\begin{aligned} f(x - 3), y + 2) &= (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 + 6(x - 3) \\ &\quad - 16(y + 2) + 9 \\ &= x^2 - 6x + 9 + 4y^2 + 16y + 16 + 6x - 18 \\ &\quad - 16y - 32 + 9 \\ &= x^2 + 4y^2 - 16. \end{aligned}$$

EJERCICIOS 1. H

1. Dado $f(x) = 2x + 3$; dar $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(a)$, $f(a^2)$, $f(1 - y)$.

2. Dado $f(x) = 7x - 2$; dar $f(0), f(1), f(2), f(-1), f(-2), f(a+b), f(3-2c)$.
3. Dado $f(x) = 3 - x$; dar $f(1), f(3), f(-3), f(10), f(x^2), f(-x^2)$.
4. Dado $f(x) = x^2 - 7x + 12$; dar $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(-1), f(-2), f(-3), f(-4), f(-5), f(a+3), f(a-4)$.
5. Dado $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 3x - 5$; dar $f(2) + g(4)$; $f(3) \times g(5)$; $f[g(2)]$; $g[f(1)]$; $[f(-2)]^2 \cdot g(-3)$; $[g(a)]^2 - 9f(a) - 7$.
6. Suponiendo $F(x) = 5x - 3$, dar $[F(z)]^2 - F(z^2)$.
7. Suponiendo $f(x) = 3x + 7$, dar $f(a-3)[f(a) - 3]$.
8. Suponiendo $h(x) = (x+a)(x+b)$, dar $h(a), h(b), h(a+b), h(a-b)$.
9. Suponiendo $f(x) = 3x^4 + 5x^2 - 18$; dar $f(-x) = f(x)$.
10. Suponiendo $f(x) = 7x^3 - 2x$, mostrar que $f(-x) = -f(x)$.
11. Suponiendo $f(x) = x^2 - 3x + 2$, dar $f[f(x)]$.
12. Dado $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$, dar $f(2,3), f(3,2), f(2, -3), f(-2, 3,) f(-2, -3), f(-3, 2), f(-3, -2), f(a,a)$.
13. Dado $F(x,y) = 3x^2 - 2xy - 4y^2 - 6x + 3y + 7$, dar $F(y,x), f(-2, 3), f(-2, -3), f(-3,2), f(-3, -12), f(a,a)$.
14. Dado $f(x) = cx$; mostrar que $f(a) + f(b) = f(a+b)$.
15. Dado $f(x) = cx$; mostrar que $f(a) - f(b) = f(a-b)$.
16. Dado $f(x) = x - 1$, mostrar que $[f(a)]^2 + f(a^2) = 2af(a)$.

Expresar lo que sigue en notación funcional y después dar la forma particular de la función:

17. La circunferencia c de un círculo en términos de su radio r. Resolución: $c = f(r) = 2\pi r$.
18. La superficie A de un círculo en términos de su radio r.
19. El volumen V y la superficie S de un cubo en términos de su lado a.
20. La distancia d, en millas, cubierta por un automóvil viajando a la velocidad de 55 millas por hora, en términos de tiempo t, en horas.
21. El número de galones g de gasolina usados por un automóvil viajando una distancia de m millas, el consumo del carro siendo de 18 millas por galón.
22. El costo mensual C, en dólares, del servicio telefónico, en términos de n, el número de llamadas hechas durante el mes, con un cobro básico de \$ 3.00 al mes y un cobro adicional de 5 cents. por cada llamada hecha.
23. El volumen V y la superficie total T de un cilindro circular recto en términos de su radio r y su altura h.
24. La superficie total T de un paralelepípedo rectangular en términos de su largo l, ancho w y altura h.
25. La superficie lateral L, y la superficie total T de un cono circular recto en términos de h, su altura y de r, el radio de su base.

1.19. El eje de los números reales.

En una línea recta $X'X$, de extensión ilimitada en ambas direcciones, escogemos un punto de referencia arbitrario O. (Ver Gráfica 1.1.)

FIG. 1.1.

Este punto se llamará el *origen* y se empleará como un punto cero desde donde se miden las distancias. En seguida, escogemos una unidad conveniente de medición. Si consideramos las distancias medidas a la derecha como positivas y las que se midieron a la izquierda como negativas, podemos señalar los números 1, 2, 3, ... a la derecha de O y $-1, -2, -3, \ldots$ a la izquierda de O.

NOTA. El símbolo ... es el símbolo de *continuación* y puede leerse como "etc.".

La escala numerada así se llama el *eje de números reales* o el *eje real*, y se ha de suponer que para cada número real corresponde un solo y único punto en el eje y que a cada punto del eje corresponde solamente un número real único. (Para el estudio de los números reales y otras clases de números ver núm. 12.2.)

1.20. Coordenadas rectangulares.

Ahora tomaremos dos ejes $X'X$ e $Y'Y$ cruzándose en ángulos rectos en un punto de origen común O. (Ver Gráfica 1.2.) En cada eje esco-

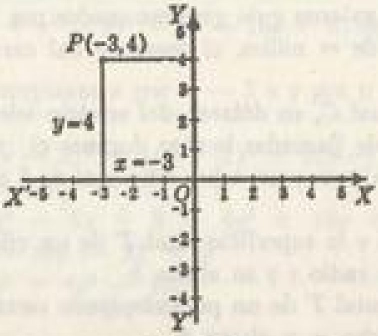


FIG. 1.2.

gemos una unidad conveniente de medición, que puede o no ser la misma para ambos ejes.

La línea horizontal $X'X$ se llama el *eje x*, la línea vertical $Y'Y$ se llama el *eje y*. Las direcciones positivas se escogerán a la derecha para el primer eje y hacia arriba para el otro, tal como se indica por las flechas. Esta selección es arbitraria, pero es la usual.

Ahora, tomamos cualquier punto P. La distancia desde este punto hasta el eje x se llama la *abscisa* del punto y se señala con una x. Su distancia desde el eje x se llama la *ordinada* y se señala con y. La abscisa y la ordinada juntas se llaman las *coordinadas* (más exactamente, las *coordinadas rectangulares)* del punto. El punto P cuya abscisa es x y cuya ordinada es y se designa por (x,y) o $P(x,y)$, nombrándose siempre en primer lugar la abscisa.

Obviamente, cuando un punto se encuentra a la derecha del eje y, su abscisa es positiva; cuando está a la izquierda, su abscisa es negativa. Cuando un punto se encuentra arriba del eje x, su ordinada es positiva; si se encuentra debajo del eje x, su ordinada es negativa.

El punto $P(-3,4)$ en la Gráfica 1.2. tiene la abscisa $x = -3$ y la ordinada $y = 4$.

1.21. Gráficas.

El proceso consistente en localizar y marcar un punto del cual se conocen las coordinadas se llama determinar el punto. La determinación

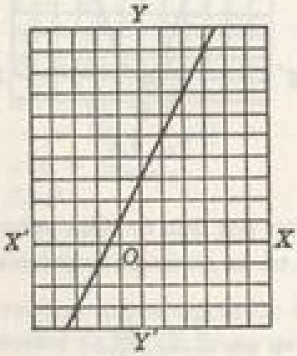


FIG. 1.3.
$y = 2x + 3$

$y = 2x + 3$

x	y
−3	−3
−2	−1
−1	1
0	3
1	5
2	7
3	9

se facilita con el uso de *papel coordinado* o *papel gráfico*, es decir papel con cuadrículas horizontales y verticales (ver Gráfica 1.3).

Consideramos ahora la función

$$y = f(x) = 2x + 3$$

Al asignar valores a x y encontrar los valores correspondientes de y, podemos elaborar una tabla como las que adjuntamos. Cuando los pares de números que se encuentran en esta tabla se toman como coordinadas de puntos y que se localizan estos puntos, se verá que están en una línea recta. (Ver Gráfica 1.3.) Esta línea se llama la *gráfica* de la función $f(x) = 2x + 3$ o de la ecuación $y = 2x + 3$.

Procediendo de la misma manera con la función

$$y = f(x) = x^2$$

encontramos que los puntos que obtenemos se sitúan en una curva (Gráfica 1.4.).

Cuando la relación entre x e y es dada bajo la forma $3x + 2y = 6$, por ejemplo, en la cual ninguna variable se expresa como

$y = x^2$

x	y
−4	16
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

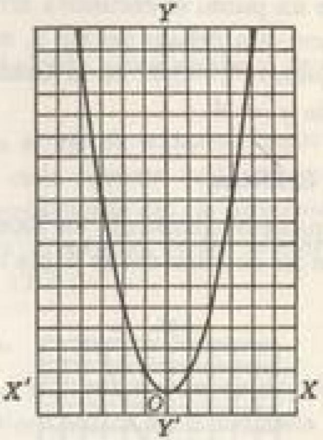


FIG. 1.4.
$y = x^2$

una función de la otra, podemos resolver por una de ellas antes de tratar de construir la gráfica. Por lo tanto, en la ecuación mencionada antes debemos encontrar

$$2y = 6 - 3x, \quad o \quad y = \frac{6 - 3x}{2}$$

antes de obtener valores y hacer la determinación.

EJERCICIOS 1. I

Determinar los puntos siguientes:

1. (5,8), (5, −8), (−5, 8), (−5, −8), (8,5), (8, −5), (−8, 5), (−8, −5).

2. $(6,0)$, $(-6,0)$, $(0,6)$, $(0, -6)$, $(0,0)$.
3. $(2\pi,3)$, $(2\pi,3\pi)$, $(2 + \pi,3)$, $(2,3 - \pi)$, $(-3\pi,\pi - 6)$.
4. $(7,7)$, $(7, -7)$, $(-7,7)$, (π,π), $(-7, -7)$, $(\pi, -\pi)$, $(-\pi,\pi)$, $(-\pi, -\pi)$.
5. $(\frac{1}{3}, -4)$, $(\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3})$, $(-1.8, -3.2)$, $(3.25, -6.75)$, $(-8.3,0)$.
6. Encontrar la distancia desde el origen de cada uno de los puntos siguientes:

   $(5,12)$, $(3, -4)$, $(-8, 15)$, $(-24, -7)$, $(9,0)$, $(0, -10)$, $(6, \sqrt{13})$, $(-8, -6)$, $(\sqrt{5}, \sqrt{11})$, $(-2,7)$.

   Sugestión. Emplee el Teorema de Pitágoras.

Dibuje las gráficas de las siguientes ecuaciones. Si la gráfica no es una línea recta deberán indicarse bastantes puntos para dar la idea de una curva. Dar valores fraccionados a una de las variables si es necesario.

7. $y = x - 4$.
8. $y = -x - 4$.
9. $y = 2x$.
10. $y = x + 3$.
11. $y = -x$.
12. $y = 3 - x$.
13. $y = 2x - 5$.
14. $y = 2x + 5$.
15. $y = \frac{1}{2}x + 4$.
16. $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
17. $y = 3x - 6$.
18. $y = -4x + 7$.
19. $y = x^2 - 9$.
20. $y = \frac{1}{6}x^2 + 1$.
21. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.
22. $y = x^2 - x + 1$.
23. $y = 4 - x^2$.
24. $y = 6 + 2x + x^2$.
25. $y = 6x - x^2$.
26. $y = 2x^2 + 5x$.
27. $y = x^2 - 6x + 5$.
28. $y = x^2 + 7x + 10$.
29. $y = x^2 - 6x + 9$.
30. $y = x^2 + 4x + 4$.
31. $y = (x - 2)(x + 3)$.
32. $y = (x + 1)(x - 5)$.
33. $y = x(x - 6)$.
34. $y = x(x + 6)$.
35. $y = 0.1x^3$.
36. $y = \frac{1}{2}x^3 - x$.
37. $x = y^2 - 3y$.
38. $x^2 = 2y - 6$.
39. $x^2 + 3y - 9 = 0$.
40. $x^2 + x + y + 1 = 0$.

41. Un granjero quiere cercar un terreno rectangular. Un lado del terreno consiste ya en un muro de piedra y tiene, además, 50 yardas de cerca para los 3 otros lados del terreno. Figurando como x el largo del lado de terreno perpendicular al muro, dar la superficie del terreno como función de x. Dibuje una gráfica de la función y con ella dé una estimación del valor de x que dará la máxima superficie posible para poder cercarse.
42. Se construye una caja sin tapa cortando cuadros iguales de las esquinas de una hoja de cartón de 16 por 16 pulgadas y doblando los lados. Dar el volumen de la caja como función del lado x de los

cuadros recortados. Dibuje una gráfica de la función y estime el valor de x que ha de proporcionar el volumen mayor de la caja.

43. Haga el ejercicio anterior para una caja hecha de una hoja de cartón de 10 por 16 pulgadas.

44. Una caja de base cuadrada debe tener una capacidad de 54 pies cúbicos. El costo del material para la tapa y el fondo es de 20 cents. por pie cuadrado, para los lados es de 10 cents. por pie cuadrado. Dar el costo total del material como una función de x, el lado de la base. Dibuje una gráfica de la función y dé la estimación del valor de x que hará que el costo sea el mínimo posible.

CAPITULO II

Ecuaciones lineales

2.1. Ecuaciones.

Una *ecuación* sirve para indicar que dos expresiones son iguales, las expresiones se llaman los *miembros* o *lados* de la ecuación. Estos miembros se llamarán *izquierdos* o *derechos* según si preceden o siguen el signo $=$ en la ecuación. Generalmente, una ecuación contiene una o más cantidades literales, que se llaman *incógnitas*, y es precisamente el fin de los procesos algebraicos el de descubrir los valores de estas cantidades. Así:

$$3x - 7 = 5$$

es una ecuación en la cual la incógnita es x.

Una ecuación cuyos miembros son iguales para todos los valores admisibles * de la incógnita o las incógnitas que contenga, es una *ecuación idéntica* o una *identidad*. Una ecuación cuyos miembros son iguales para ciertos valores (o posiblemente para ningún valor), de la incógnita o las incógnitas que contenga, pero no para todos los valores admisibles, es una *ecuación condicional*. La palabra "ecuación" cuando se emplea sin modificar, se interpretará normalmente como una "ecuación condicional".

Cuando una ecuación contiene solamente una incógnita, cualquier número que, cuando se sustituye por la incógnita, hace que los miembros de la ecuación sean iguales entre sí se llama una *raíz* o *solución* de la ecuación, y se dice que satisface la ecuación. Cuando una ecuación contiene más de una incógnita, cualquier cantidad de números que, cuando se sustituyen por las incógnitas, haga que los miembros sean iguales entre sí es una solución.

Las ecuaciones

$$2(x - 3) = 2x - 6, \qquad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

* Un valor admisible es un valor para el cual todas las expresiones incluidas en la ecuación tienen significado.

$$\frac{x^2+2}{x-1} = x+1+\frac{3}{x-1}$$

son identidades, pudiendo satisfacerse por todos los valores admisibles de las incógnitas. (Notar que en la última identidad, 1 no es un valor admisible para x; los miembros no se definen por $x = 1$, puesto que este valor indicaría división por cero.)

La ecuación $3x - 7 = 5$, por otro lado, es una ecuación condicional, puesto que se satisface solamente por $x = 4$.

Una identidad se escribe frecuentemente con el signo $\equiv$ en vez de $=$ para dar énfasis a su calidad de identidad en vez de una ecuación condicional. Así:

$$2(x-3) \equiv 2x - 6.$$

2.2. Ecuaciones equivalentes.

Dos ecuaciones son *equivalentes* si tienen exactamente las mismas soluciones. Así, las ecuaciones

$$x - 5 = 0 \quad \text{y} \quad 2x = 10$$

son equivalentes; cada una tiene como solución $x = 5$ y ninguna otra.

2.3 Operaciones que dan ecuaciones equivalentes.

Las operaciones siguientes con una ecuación producirán siempre una ecuación equivalente:

Al sumar el mismo número o expresión en ambos lados o al sustraer el mismo número o expresión de ambos lados.

Al mulitplicar o dividir ambos lados por el mismo número o la misma expresión, a condición de que este número o expresión no sea cero y no contenga una incógnita.

NOTA. A veces emplearemos la frase "multiplicando una ecuación por 2" en vez de la forma más larga "multiplicando ambos lados de una ecuación por 2".

2.4. Ecuaciones lineales con una incógnita.

Una ecuación con la forma

$$ax + b = 0$$

en la cual $a \neq 0$,* es una ecuación lineal con la incógnita x. Ejemplos de ecuaciones lineales con una incógnita:

$$3x + 2 = 0, \qquad x - 6 = 0, \qquad 2x = 0.$$

Para resolver una ecuación, hacemos las mismas operaciones permitidas (ver la sección precedente) en ambos lados, con el fin de tener la incógnita sola a un lado de la ecuación.

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación $x + 2 = 7$.

RESOLUCIÓN. Sustraer 2 de ambos lados: **

$$x + 2 - 2 = 7 - 2$$

o

$$x = 5$$

CHECANDO. Sustituir $x = 5$ en la ecuación original:

$$5 + 2 = 7$$
$$7 = 7$$

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación $4x - 5 = x + 1$.

RESOLUCIÓN. Sustraer x de ambos lados para suprimir el x del lado derecho y agregar 5 en ambos lados para eliminar el -5 a la izquierda. Estas operaciones pueden hacerse simultáneamente:

$$4x - 5 - x + 5 = x + 1 - x + 5$$
$$3x = 6$$

Dividiendo ambos lados por 3:

$$x = 2$$

REVISIÓN. Sustituir $x = 2$ en la ecuación original:

$$4 \cdot 2 - 5 = 2 + 1,$$
$$8 - 5 = 3$$
$$3 = 3$$

Ejemplo 3.

Resolver la ecuación $\frac{3}{4}x - 1 = 2x + 9$.

* El símbolo $\neq$ se lee "no es igual a" o "es diferente de".

** Ocasionalmente podemos expresar esto con "Transponer el 2". De acuerdo con el primer principio fundamental del núm. 2.3, un número puede transponerse de un lado de una ecuación al otro si se cambia su signo.

Resolución. Multiplicar ambos lados por 4 para eliminar las fracciones (es decir, para deshacerse del coeficiente fraccional de la izquierda):

$$3x - 4 = 8x + 36.$$

Sustraer 8x de ambos lados y agregar 4 a ambos lados:

$$3x - 4 - 8x + 4 = 8x + 36 - 8x + 4$$
$$-5x = 40$$

Dividir ambos lados por -5:

$$x = -8$$

Revisión. Sustituir $x = -8$ en la ecuación original:

$$\tfrac{3}{4}(-8) - 1 = 2(-8) + 9$$
$$-6 - 1 = -16 + 9$$
$$-7 = -7.$$

EJERCICIOS II. A

Dar, si es posible, el valor de x:

1. $7x + 42 = 0.$
2. $2x + 19 = 35.$
3. $5x - 8 = 2x + 7.$
4. $6x + 13 = 11x - 10.$
5. $3x + 2 - 4(x - 3) = 2(5x - 4).$
6. $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)(x + 7).$
7. $(x - 2)(x - 4) = (x - 3)(x + 6).$
8. $(2x + 3)(3x + 2) = (x - 5)(6x + 1).$
9. $3ax - 2 = 5bx + 7.$
10. $(x + a)(x + b) = (x + c)(x + d).$
11. $(ax + c)(bx + d) = (bx + c)(ax + d).$
12. $(2x + 5)^2 - x(4x - 5) = 100.$
13. $(3x - 2^2 - 9x^2 = 4(1 - 3x).$
14. $(2x - a)^2 - 4x^2 = x + 4a.$
15. $x^2 + a(a - 2x) = (x - 2a)^2.$
16. $x^2 + a(a - 2x) = a^2 + x(x - 2a).$
17. $(x - 5)(5 - x) = 5(2x - 3) - x^2.$
18. $(2x - 9)(2x + 7) = (2x - 5)(2x + 3).$
19. Resolver por r: $P(1 + rn) = A.$
20. Resolver por d y por n: $l = a + (n - 1)d.$
21. Resolver por l: $S = \dfrac{n}{2}(a + l).$
22. Resolver por r: $V = \dfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$
23. Resolver por d: $p + ghd + \dfrac{1}{2}v^2d = c.$

24. La fórmula para cambiar una temperatura indicada en grados Fahrenheit a grados Centígrados C es:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

a) Resolver esta ecuación por F. *b)* ¿A qué temperatura serán iguales las lecturas en grados Fahrenheit y Centígrados?

2.5. Problemas en palabras.

Muchos problemas dados en palabras tienen que traducirse en símbolos matemáticos antes de poder resolverse. Todas las soluciones deberán revisarse probándolas en el problema original en palabras.

Ejemplo 1.

¿Cuántas libras de agua deberán evaporarse de 50 libras de una solución de sal al 3 por ciento de manera que la solución resultante tenga un contenido de sal de 5 por ciento?

Resolución. El número de libras de sal en la solución es: $0.03 \times 50 = 1.5$. Que x sea el número de libras de agua que deberán evaporarse. Entonces $50 - x =$ el número de libras de solución que queda, y la cantidad de sal no cambiará. Puesto que 5 por ciento de la solución ya será sal, tenemos

$$\begin{aligned} 0.05(50 - x) &= 1.5 \\ 2.5 - 0.05x &= 1.5 \\ -0.05x &= -1.0 \\ x &= 20. \end{aligned}$$

Es decir, tendrán que evaporarse 20 libras de agua.

Revisión. Si 20 libras de agua se evaporan, el número de libras de solución remanente será de $50 - 20 = 30$, de las cuales 5 por ciento debe ser sal. Pero $0.05 \times 20 = 1.5$, que es el número actual de libras de sal.

Ejemplo 2.

Dos aviones salieron de aeropuertos distantes 600 millas y volaron hasta encontrarse. Un avión voló 20 millas por hora más aprisa que el otro. Si se encontraron después de 1 hora y 12 minutos, ¿cuáles fueron sus velocidades respectivas?

Resolución. Que x sea la velocidad, en millas por hora, del avión más lento. Entonces $x + 20$ será la velocidad del avión más rápido. La

distancia que cada uno de ellos voló se encuentra multiplicando su velocidad por el tiempo, $1\frac{1}{5}$ horas. Por lo tanto, la distancia total que volaron fue de $\frac{6}{5}x + \frac{6}{5}(x + 20)$, y debe de ser 600 millas, así:

$$\frac{6}{5}x + \frac{6}{5}x + \frac{6}{5} \cdot 20 = 600$$
$$\frac{12}{5}x + 24 = 600$$
$$\frac{12}{5}x = 600 - 24 = 576$$
$$12x = 5 \times 576 = 2880$$
$$x = 2880 : 12 = 240$$
$$x + 20 = 260.$$

Es decir, la velocidad de los aviones fue de 240 y 260 millas por hora, respectivamente.

Revisión. La distancia que voló el avión más lento fue de $1\frac{1}{5} \times 240$ millas o 288 millas; la distancia que voló el avión más rápido fue de $1\frac{1}{5} \times 260$ millas, o 312 millas. La suma de estas distancias es $288 + 312 = 600$ millas.

EJERCICIOS II. B

1. Un número es 17 menor que otro; la suma de ambos es 125. ¿Cuáles son estos números?
2. Dar tres íntegros consecutivos cuya suma es 378.
3. El largo de un rectángulo es de 13 pulgadas más grande que su ancho. El perímetro es de 8 pies. Dar sus dimensiones.
4. Cada lado igual de un triángulo isósceles tiene $3\frac{1}{2}$ pulgadas más que la base. El perímetro del triángulo es de 2 pies. Dar el largo de su base.
5. Un poste vertical se quebró por el viento. La parte superior aún adherida, alcanzó un punto en el suelo plano a 15 pies de la base. Si la parte superior tiene 9 pies más de largo que la parte inferior, ¿cuál era la altura del poste?
6. El ancho de un rectángulo es de 9 pulgadas. El largo tiene 1 pulgada menos que la diagonal. Dar el largo de la diagonal.
7. Un hombre tiene tres veces la edad de su hijo. Hace cuatro años tenía cuatro veces la edad de su hijo. ¿Qué edad tiene el hijo?
8. Una cantidad de \$ 2.45 se compone de monedas de cinco y de monedas de 25 centavos, pero hay dos veces más quintos que monedas de 25 centavos. ¿Cuántas hay de éstas últimas?
9. Una organización vendió 591 boletos para una función de beneficencia con un total de \$ 848.25. Algunos boletos se vendieron a \$ 1.25 cada uno, otros a \$ 1.75 cada uno. ¿Cuántos boletos de cada clase se vendieron?

10. ¿Cuántas onzas de níquel puro deben agregarse a 150 onzas de una aleación con 70 por ciento de pureza para producir una aleación con 85 por ciento de pureza?
11. ¿Cuántas libras de crema que contienen 12 por ciento de suero deben agregarse a 1,800 libras de leche con un 2 por ciento de suero para producir una leche con 3 por ciento de suero?
12. ¿Cuánta agua debe agregarse a 200 galones de mezcla con un porcentaje de 80 por ciento de alcohol para reducirla a una mezcla al 75 por ciento?
13. ¿Cuánto café que cuesta 85 centavos la libra debe añadirse a 150 libras costando 90 centavos la libra para formar una mezcla que cueste 87 centavos la libra?
14. La asistencia del público a una función de cine, cierto día, fue de 737 personas. Había 289 más adultos que niños. ¿Cuántos niños asistieron a la función?
15. Un señor tiene $ 16,000 pesos que coloca con intereses, parte al 3½ por ciento, el resto al 4 por ciento. Sus ingresos anuales totales provenientes de esta inversión son de $ 597.50 ¿Cuánto se invirtió a cada tipo?
16. Un hombre camina cierta distancia a la velocidad de 5 millas por hora y regresa a la velocidad de 4 millas por hora. El tiempo total invertido ha sido de 3 horas y 9 minutos. ¿Cuál es la distancia total caminada?
17. Un deportista emplea un teleférico para esquís para subir a una velocidad de 5 millas por hora y baja esquiando a la velocidad de 50 millas por hora. Si el viaje completo requiere 22 minutos, ¿cuál es la distancia desde la base hasta la cima de la colina?
18. Un avión voló en línea directa desde su base a la velocidad de 300 millas por hora y regresó por la misma ruta a la velocidad de 250 millas por hora, necesitando 15 minutos más en el viaje de regreso. ¿A qué distancia de su base voló?
19. Dos automóviles salieron al mismo tiempo de lugares distantes 100 millas. Viajaron hasta encontrarse, lo que ocurrió a 1 hora y 40 minutos de viaje. La velocidad de un automóvil era de 5 millas más alta que la del otro. Dar la velocidad de cada automóvil.
20. Un avión subió a una velocidad promedia de 300 pies por minuto y bajó inmediatamente a una velocidad promedia de 25 millas por hora. El vuelo se realizó en 25 minutos. ¿Hasta qué altura subió el avión?
21. Un coche que tiene 15 pies de largo alcanza y pasa un camión que tiene 3 pies de largo y viaja a la velocidad de 45 millas por hora. ¿A qué velocidad debe ir el coche para pasar el camión en 3 segundos?
22. Una bala se dispara a un blanco y el ruido del impacto se oye 6 se-

gundos más tarde. Si la bala viaja a la velocidad de 2,200 pies por segundo y el sonido viaja a la velocidad de 1,100 pies por segundo, ¿a qué distancia está el blanco?

23. ¿En cuánto tiempo después de las 6 se han de juntar las manecillas de un reloj?

SUGESTIÓN. Que x sea el número de espacios de minutos que adelanta la manecilla chica. Entonces $x/12$ será el número de espacios de minutos que viaja la manecilla grande.

24. ¿En cuánto tiempo después de las 12 se encontrarán las manecillas de un reloj en direcciones opuestas?

25. ¿En cuánto tiempo después de la 1 formarán las manecillas de un reloj un ángulo recto?

26.* María tiene 24 años. Tiene dos veces la edad que Ana tenía cuando María tenía la misma edad que tiene Ana ahora. ¿Qué edad tiene Ana?

Una *palanca* es una barra rígida que tiene un solo punto de soporte llamado *fulcrum*. Cuando un peso w se añade a la palanca a una distancia d del fulcrum, entonces d se llama el brazo de palanca del peso w, y el producto del peso y del brazo de palanca wd, se llama el *momento* de la fuerza en el fulcrum. En física se demuestra que cuando se añaden dos o más pesos a una palanca, si la palanca es horizontal, la suma de los momentos de un lado del fulcrum es igual a la suma de los momentos del otro lado. Así, para la palanca en la Gráfica 2.1, tenemos $w_1d_1 = w_2d_2$.

FIG. 2.1.

A menos de indicar lo contrario, el peso de la palanca misma puede olvidarse. Si el peso de la palanca se ha de considerar, debe suponerse que está distribuido *uniformemente* (es decir que cada pie lineal de la palanca pesa lo mismo). En este caso, el peso total

FIG. 2.2.

* Este problema, por alguna razón desconocida, llamó enormemente la atención en los primeros años de este siglo y la pregunta: "¿Qué edad tiene María?", fue una expresión corriente en estos días, aparentemente sin sentido alguno.

de cualquier parte de la palanca se considera como concentrado en el punto medio de esta parte.

27. Dos niños se mecen en un subibaja. El más pequeño que pesa 40 libras está a 6 pies del punto de balanceo. ¿A qué distancia del punto de balanceo debe sentarse el otro niño si pesa 60 libras?

RESOLUCIÓN. Que x sea el número de pies desde el punto de balanceo.

$$\text{Momento del 1er. niño} = 40 \cdot 6 = 240.$$
$$\text{Momento del 2º niño} = 60x.$$
$$60x = 240$$
$$x = 4.$$

28. Una tabla de 10 pies de largo pesa 8 libras por pie. Está sostenida en un punto a 3 pies de una extremidad. ¿Qué peso debe agregarse en la extremidad del lado corto para que esté en equilibrio?

RESOLUCIÓN. Método 1. Hagamos de x el peso (en libras). El lado corto de la tabla pesa $3 \times 8 = 24$ libras. Puesto que se supone que está concentrado en su punto medio, el brazo de la palanca es de 1.5 pie y su momento 24×1.5. El lado largo de la tabla pesa $7 \times 8 = 56$ libras, su brazo de palanca es de 3.5 pies y su momento 56×3.5.

Igualando la suma de momentos a la izquierda del punto de balanceo con el momento a la derecha, tenemos:

$$3x + 24 \times 1.5 = 56 \times 3.5$$
$$x = 53\tfrac{1}{3}$$

Método 2. El peso de la tabla es de $10 \times 8 = 80$ libras. Esto es, suponiendo que esté concentrado en su punto medio, que está a

FIG. 2.3.

2 pies a la derecha del fulcrum. El momento es, por lo tanto $80 \times 2 = 160$ y tenemos:

$$3x = 160, \quad x = 53\tfrac{1}{3}$$

29. Dos niños que pesan 65 libras y 45 libras respectivamente se encuentran en las extremidades opuestas de una tabla de 11 pies. ¿Dónde debe colocarse el punto de soporte si queremos que balancee la tabla? No tomar en consideración el peso de la tabla misma.

30. Si, en el ejercicio anterior, la tabla pesa 2 libras por pie, ¿dónde debe situarse en punto de soporte?
31. Un trabajador emplea una barra de 4 pies de largo. Si el fulcrum se encuentra a 7 pulgadas de una extremidad de la citada barra. ¿Qué peso podrá levantarse en caso de ejercitar una fuerza de 175 libras?
32. Si el fulcrum en el ejercicio anterior está a 8 pulgadas de la extremidad de la barra, ¿qué fuerza deberá ejercitarse para mover un peso de 1,000 libras?
33. Una barra tiene 4½ pies de largo. ¿Dónde deberá situarse el fulcrum para mover un peso de 1,600 libras, ejercitando una fuerza de 200 libras?
34. Una vara tiene un peso de 45 libras amarrado a una extremidad y un peso de 65 libras en la otra. Se equilibra a un punto situado a 8 pulgadas del centro. ¿Qué largo tiene? (Suponiendo que la vara en sí no tiene peso.)
35. Una vara tiene 8 pies de largo. Se le amarra un peso de 100 libras en una extremidad y un peso de 7 libras en la otra. A una distancia de 2 pies del peso de 100 libras, se agrega un tercer peso de 65 libras. ¿Dónde está el punto de balanceo, *a)* sin tomar en consideración el peso de la vara y *b)* si la vara pesa 10 libras por pie?

2.6. Ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Una sola ecuación lineal con dos incógnitas, tal como $2x - y = 3$, se satisface con un número ilimitado de pares de valores. A veces decimos que tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, cuando tenemos un par de ecuaciones lineales con dos incógnitas, hay generalmente un solo par de valores de las incógnitas que satisfacerá ambas ecuaciones al mismo tiempo (es decir, una solución única), aunque pueda haber un número infinito de soluciones o ninguna. Cuando se consideran las ecuaciones juntas y que es nuestro interés encontrar unas soluciones que las satisfagan ambas, las ecuaciones se denominan *ecuaciones simultáneas,* o se dice que forman un *juego* o un *sistema* de ecuaciones.

Un método para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales se demuestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo.

Resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 16 \\ 5x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Resolución. Multiplicar la primera ecuación por 2 y la segunda

por 3 de manera que los coeficientes de y sean numéricamente iguales. Tenemos:

$$\begin{aligned} 4x - 6y &= 32 \\ 15x + 6y &= 6 \end{aligned}$$

Sumando, obtenemos $19x = 38$

Dividiendo entre 19 da $x = 2$

Con la segunda de las ecuaciones originales encontramos:

$$2y = 2 - 5x = 2 - 10 = -8$$

o $$y = -4$$

Nota. El valor de y podría haberse obtenido, desde luego, al multiplicar la primera de las ecuaciones originales por 5 y la segunda por 2, y después sustraer.

Se ve fácilmente que los valores $x = 2$, $y = -4$ satisfacen las dos ecuaciones.

Las ecuaciones pueden también resolverse al resolver una de ellas por y en términos de x, digamos, sustituyendo después esta expresión en la otra y resolviendo la ecuación resultante por x.

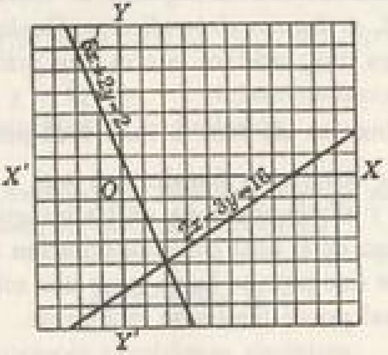


Fig. 2.4.

En la Gráfica 2.4. las líneas que son las gráficas de las dos ecuaciones están marcadas. Se podrá observar que se cortan en el punto $x = 2$, $y = -4$, lo que da la solución de las dos ecuaciones. De esta manera, la solución podría obtenerse gráficamente localizando las dos líneas y leyendo las coordinadas del punto donde se encuentran. Generalmente este método da solamente un resultado aproximado, mientras el proceso algebraico antes mencionado es exacto.

Dos ecuaciones como:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}$$

no tienen solución. Se dice que son *inconsistentes*. Sus gráficas (Gráfica 2.5.) son líneas paralelas y, por lo tanto, no se encuentran.

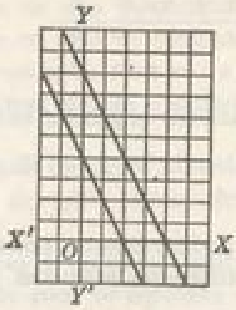


FIG. 2.5.

Dos ecuaciones como

$$2x + y = 4$$
$$4x + 2y = 8$$

en las cuales se puede obtener la segunda al multiplicar ambos lados de la primera por 2, se llaman *dependientes*. Cualquier par de valores de x e y que satisfaga una, satisface la otra. Sus gráficas coinciden.

2.7. Ecuaciones lineales de tres o más incógnitas.

Para resolver las ecuaciones lineales con tres o más incógnitas, las tomamos por pares y eliminamos una de las incógnitas, reduciendo las ecuaciones a un juego en el cual hay una ecuación menos y una incógnita menos. Se repite este proceso hasta tener una sola ecuación con una sola incógnita, la cual puede resolverse fácilmente.

Ejemplo.

Resolver las ecuaciones simultáneas:

$$5x - y + 4z = 5 \qquad (1)$$
$$2x + 3y + 5z = 2 \qquad (2)$$
$$7x - 2y + 6z = 5 \qquad (3)$$

RESOLUCIÓN. Combinaremos en primer lugar las ecuaciones (1) y (2), eliminando y y, después, combinaremos (1) y (3), para eliminar también y.

Multiplicando (1) por 3, da:

$$15x - 3y + 12z = 15 \qquad (4)$$

Sumar (2) y (4). Resultado:

$$17x + 17z = 17$$
$$x + z = 1. \qquad (5)$$

o multiplicando (1) por 2, lo que da

$$10x - 2y + 8z = 10 \qquad (6)$$

Sustraer (3) de (6). Tenemos:

$$3x + 2z = 5. \qquad (7)$$

Ahora podemos combinar (5) y (7). Multiplicando (5) por 2, obtenemos:

$$2x + 2z = 2. \qquad (8)$$

y sustrayendo (8) de (7), encontramos

$$x = 3.$$

Sustituyendo este valor de x en (5), tenemos

$$z = -2.$$

Finalmente, poniendo $x = 3$, $z = -2$ en (1) obtenemos

$$y = 5x + 4z - 5 = 15 - 8 - 5 = 2.$$

Sustituyendo $x = 3$, $y = 2$, $z = -2$ en las ecuaciones originales (1), (2), (3), verificamos la exactitud de la resolución.

(Respecto a un método para resolver juegos de ecuaciones lineales por medio de determinantes, ver el Capítulo XVIII.)

EJERCICIOS II. C

Resolver las ecuaciones simultáneas siguientes:

1. $3x + y = 44$; $2x + y = 31.$
2. $2x + 8y = 79$; $2x - 5y = -38.$
3. $4x - 6y = 35$; $7x + 11y = 29.$
4. $3x - 6y = -38$; $6x - 9y = 44.$
5. $8x + 7y = 46$; $12x - 5y = 100.$
6. $51x - 42y = -14$; $17x + 34y = 20.$
7. $56x + 84y = 29$; $42x + 28y = 13.$
8. $52x - 28y = 5$; $4x + 4y = 5.$
9. $17x - 3y = 0$; $8x + 18y = 275.$
10. $13x + 15y = 0$; $22x - 19y = 0.$
11. $14x - 12y = 7$; $21x - 18y = 21.$
12. $22x + 16y = 6$; $33x + 24y = 9.$

13. $14x - 12y = 0$
$49x - 42y = 0$

14. $34x - 13y = -237$
$51x + 17y = 119.$

15. $7x + 12y = 240$
$17x - 13y = 35.$

16. $32x + 33y = -2$
$36x + 9y = 1\frac{1}{2}.$

17. $21x + 8y = 47a$
$25x - 6y = 87a.$

18. $21ax + 8y = 47$
$35ax - 6y = 117.$

19. $4x + 15y = a$
$6x - 25y = b.$

20. $ax + by = c$
$dx + ey = f.$

21. $\frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 29$
$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 37$

22. $\frac{6}{x} - \frac{7}{y} = 26\frac{1}{2}$
$\frac{5}{x} + \frac{8}{y} = 29$

SUGESTIÓN. Resolver en primer lugar por $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$.

23. $4x + \frac{2}{y} = 3$
$7x + \frac{3}{y} = 5$

24. $\frac{12}{x} + 7y = \frac{17}{2}$
$\frac{18}{x} - 13y = -15$

25. $3x + 2y + z = -4$
$5x - 6y + z = 92$
$4x + 7y - z = -67.$

26. $5x + 8y + 2z = -14$
$2x + 5y + 3z = 3$
$3x - 6y + 4z = -4$

27. $37x - 23y + 17z = -32$
$14x \quad 22y - 11z = -91$
$-9x + 11y - 10z = 1.$

28. $x + y = 2$
$y + z = 4$
$z + x = 9.$

29. $3x + 2y + 7z = 161$
$2x + 7y + 4z = 43$
$7x + 4y + 5z = 155.$

30. $6x + 21y - 19z = -102$
$4x - 9y - 5z = 24$
$7x + 6y - z = 0.$

31. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{4}$
$\frac{3}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{20}$
$\frac{4}{z} + \frac{5}{x} = \frac{33}{10}.$

32. $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} - \frac{3}{z} = 22$
$\frac{7}{x} - \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = 51$
$\frac{9}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 35.$

33. $3x - 2y + 5z + 8w = 99$
$2x + y + 7z - 2w = 32$
$4x - 3y - 8z + 3w = -9$
$5x - 4y - 4z - w = -8.$

34. $x + y + z = 6$
$y + z + w = 7$
$z + w + x = 8$
$w + x + y = 9.$

NOTA. A veces, un método especial permitirá una solución más clara y rápida. Por ejemplo, el ejercicio 34 puede resolverse como sigue: Sumar las cuatro ecuaciones y dividir por 3. Sustraer cada ecuación por turno del resultado.

35. $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y + z &= 7 \\ z + w &= 13 \\ w + x &= 8. \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} x + y + z &= a + b \\ y + z + w &= b + c \\ z + w + x &= c + d \\ w + x + y &= d + a. \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} x + y + z - w &= a \\ x + y - z + w &= b \\ x - y + z + w &= c \\ -x + y + z + w &= d. \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} x + y - z &= a \\ y + z - w &= b \\ z + w - x &= c \\ w + x - y &= d. \end{aligned}$

2.8. Más problemas enunciados oralmente.

Muchos problemas en palabras se interpretan por ecuaciones lineales, como lo vimos en el estudio de las ecuaciones lineales con una sola incógnita. Obviamente, no existe método mecánico para ordenar las ecuaciones de todos estos problemas. Cada problema debe analizarse independientemente. El significado de cada problema debe entenderse bien y cada parte del problema debe traducirse a ecuaciones matemáticas. Sin embargo, para ciertos problemas que incluyen mezclas, velocidades, tipos de intereses, etc... un arreglo tabular como lo que se emplea en la ilustración siguiente puede ser útil para determinar las ecuaciones cuyas resoluciones dan la contestación del problema.

Ejemplo 1.

Una compañía distribuidora de semillas desea emplear semilla de pasto que se vende a razón de \$ 1.30 la libra y semilla de trébol que se vende a \$ 1.80 la libra para hacer 100 libras de mezcla de semillas que se venda a \$ 1.38 la libra. ¿Qué cantidad de cada clase de semilla deberá emplearse?

RESOLUCIÓN.

	Cantidad de libras ×	*Precio por lb.* =	*Precio total*
Pasto	x	1.30	$1.30x$
Trébol	y	1.80	$1.80y$
Mezcla	100	1.38	138.00

$$x + y = 100$$
$$1.30x + 1.80y = 138.$$

Estas ecuaciones tienen la solución siguiente $x = 84$, $y = 16$. Es decir, 84 libras de semilla de pasto y 16 libras de semilla de trébol deberán usarse.

REVISIÓN.

$$\begin{array}{lrl} & 84 \times \$1.30 = & \$109.20 \\ & 16 \times \$1.80 = & \$\ \ 28.80 \\ \hline 100 \text{ libras a} & & \$138.00 = \$1.38 \text{ la libra.} \end{array}$$

Se ha de notar que para cada hilera en la tabla el producto de los números en las dos primeras columnas da el número de la tercera columna, o que el número de la tercera columna dividido por el número en la primera o en la segunda columna da el número de la otra columna.

En problemas de velocidades, tenemos la relación fundamental siguiente:

Tiempo × Velocidad = Distancia.

En problemas con intereses simples, tenemos la relación:

Principal × Tipo = Interés Anual.

Consecuentemente, los arreglos tabulares antes mencionados pueden emplearse frecuentemente en dichos problemas.

NOTA. Debe tenerse cuidado de emplear las mismas unidades mientras se resuelve un problema dado. Así, en los ejemplos ilustrados antes debemos emplear centavos o dólares durante la operación.

En problemas que tienen que ver con lanchas o barcos en ríos debemos emplear el principio:

Velocidad con la corriente = Velocidad en agua tranquila + Velocidad de la corriente,

Velocidad contra la corriente = Velocidad en agua tranquila − Velocidad de la corriente.

El ejemplo 1 puede resolverse empleando solamente una cantidad incógnita, aunque la solución con dos incógnitas sea, quizá, más clara. En algunos casos es casi indispensable emplear dos incógnitas, o hasta más.

En cierto tipo de problema es conveniente emplear las recíprocas de las cantidades desconocidas. Por ejemplo, si un hombre necesita x días para hacer determinado trabajo, la parte de trabajo que pueda hacer en un día es $1/x$. Similarmente si una tubería necesita x horas para llenar un tanque, la parte de tanque que puede llenar en 1 hora es de $1/x$.

Ejemplo 2.

Dos tuberías trabajando simultáneamente pueden llenar un tanque en 2 horas y 40 minutos. Después de hacer trabajar la tubería más grande durante 3 horas, se conectó también la tubería chica y el tanque se llenó 40 minutos más tarde. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de las tuberías, sola, para llenar el tanque?

Resolución. Que $x =$ el número de horas que tomaría la tubería más grande para llenar el tanque e $y =$ el número de horas que se llevaría la tubería chica para el mismo trabajo. Así:

$\frac{1}{x} =$ la parte del tanque que la tubería grande llena en 1 hora.

$\frac{1}{y} =$ la parte del tanque que la tubería chica llena en 1 hora.

Puesto que las dos tuberías trabajando simultáneamente pueden llenar el tanque en $2\frac{2}{3}$ horas, la parte del tanque que pueden llenar en 1 hora es de

$$\frac{1}{2\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}.$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8} \qquad (1)$$

La parte del tanque que la tubería grande llena en 3 horas es $\frac{3}{x}$ y la parte que llenan ambas tuberías en 40 minutos (es decir $\frac{2}{3}$ de una hora) es $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto,

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{4} = 1 \qquad (2)$$

(tomando como 1 el tanque lleno). Las ecuaciones (1) y (2) pueden resolverse por $1/x$ y $1/y$, y se verá que $x = 4$, $y = 8$. Es decir que la tubería grande necesitará 4 horas y la tubería más chica necesitará 8 horas para llenar el tanque.

Revisión. La parte del tanque que ambas tuberías pueden llenar en 1 hora es $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Por lo tanto, para llenar el tanque necesitarán $\frac{8}{3}$ horas $=$ 2 horas y 40 minutos.

EJERCICIOS II. D

1. Un fabricante de dulces tiene dos clases de dulces que se venden a 75 centavos y 90 centavos la libra, respectivamente. ¿Cuántas libras de cada clase deberá emplear para tener una mezcla de 150 libras que se venda a 78 centavos la libra?
2. Un expendedor de tabaco quiere mezclar dos tipos de tabaco que cuestan 8 centavos y 10 centavos la onza, respectivamente, y quiere vender la citada mezcla a 12 centavos la onza con una utilidad de 25 porciento sobre el costo. ¿Cuántas onzas de cada tipo de tabaco tendrá que emplear en cada libra? (1 libra = 16 onzas).
3. Un frutero vendió 9 docenas de limones y 16 docenas de naranjas por $ 17.40. Al día siguiente vendió, a los mismos precios, 11 docenas de limones y 20 docenas de naranjas por $ 21.60. Dar el precio de sus limones y naranjas.
4. Un tambor contiene una mezcla de ácido y de agua. Si se agregan 25 galones de ácido a la mezcla tendrá un 80 por ciento de ácido y si se le agrega 25 galones de agua, la mezcla tendrá un porcentaje de ácido de 60 porciento. Dar el porcentaje de ácido en la mezcla.
5. ¿Cuánto estaño y cuánto plomo deben añadirse a 700 libras de una aleación que contiene 50 porciento de estaño y 25 porciento de plomo para lograr una aleación con 60 porciento de estaño y 20 porciento de plomo?
6. Un recipiente contiene x onzas de ácido. Un segundo recipiente contiene x onzas de agua. Se extraen del ácido y onzas, se colocan en agua y se mezcla la solución. Después se extraen y onzas de la mezcla y se vierten en el ácido. Dar (a) la concentración de ácido en el segundo recipiente y (b) la concentración de agua en el primer recipiente.
7. Si el largo de un rectángulo se aumenta 8 pies y su ancho 3 pies, su superficie aumentará en 200 pies cuadrados. Cuando se aumenta su largo con 3 pies y su ancho con 8 pies, su superficie aumentará en 255 pies cuadrados. ¿Cuáles son sus dimesiones?
8. Si la altura y la base de un triángulo son aumentadas ambas en 4 pulgadas, la superficie del triángulo se aumentará en 42 pulgadas cuadradas. Si la altura se aumenta en 3 pulgadas y la base se reduce en 2 pulgadas, la superficie se aumentaría en 5 pulgadas cuadradas. Dar la altura y la base del triángulo inicial.
9. Un hombre quiere cercar un lote rectangular. Si emplea material que cuesta $ 1.70 el pie para el frente del lote y material costando $ 1.40 el pie para los otros tres lados, la cerca le costará $ 890.00. Al emplear el material más barato para los 4 lados del lote,, esta cerca le costara $ 854.00. Dar las dimensiones del lote.

10. Se vendieron boletos para una función de beneficencia a $ 1.50 y 0.85, respectivamente, siendo el total de ingresos de $ 444.70. Si se hubieran vendido dos veces más boletos de $ 1.50 y la mitad de los boletos más baratos, los ingresos hubieran sido $ 593.60. ¿Cuántos boletos de cada precio se vendieron inicialmente?
11. Un ángulo de un triángulo tiene dos veces la dimensión de otro y tiene 25 grados más que el tercer ángulo. ¿Cuáles son los tres ángulos?
12. Un señor tiene dos cantidades de dinero invertidas con intereses, una a 3 porciento y la otra a 3½ porciento. Su ingreso anual por las dos inversiones es de $ 99.90. Si recibiera 3½ porciento de interés por ambas inversiones, su ingreso sería de $ 109.20. ¿Cuánto dinero tiene invertido en cada tipo de interés?
13. Un señor tiene 3 cantidades invertidas, una al 4 porciento, otra al 3½ porciento y la última al 3 porciento. Sus ingresos totales por las tres inversiones es de $ 416.00. La primera inversión produce $ 104.00 más por año que las otras dos combinadas. Si recibiera ½ porciento más en cada inversión, sus ingresos anuales aumentarían en $ 55.75. ¿Cuánto dinero tiene invertido en cada tipo de interés?
14. Hace diez años un hombre tenía tres veces la edad de su hijo. Dentro de 6 años él tendrá el doble de la edad de su hijo. ¿Qué edad tienen?
15. Dentro de 2 años un muchacho tendrá las ¾ partes de la edad de su hermana. Hace dos años él tenía las ⅔ partes de la edad de ella. ¿Qué edad tienen?
16. Tres círculos son tangentes por la parte de afuera. Las distancias entre sus centros son de 23, 25 y 20 pulgadas. Dar sus radios.
17. Dos círculos son tangentes con un tercer círculo en la parte interior y los dos primeros círculos son tangentes entre sí en el exterior. Las distancias entre sus centros son de 14, 7 y 5 pulgadas. ¿Cuáles son sus radios?
18. Dos tuberías trabajando al mismo tiempo logran llenar una alberca en 6 horas. En caso de tener ambas tuberías trabajando juntas durante 3 horas y, entonces, cerrar la primera, la segunda necesitará 4 horas más para llenar la alberca. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de las tuberías, separadamente, para llenar la citada alberca?
19. Una tubería puede llenar un tanque en 3 horas, aunque esté abierto el desagüe. Si la tubería trabaja con el desagüe abierto durante 1 hora y después se cierra este, el tanque se llenará en 40 minutos más. ¿En cuánto tiempo llenará la tubería el tanque con el desagüe cerrado?
20. Dos aviones operando al mismo tiempo pueden tomar las fotografías necesarias para formar el mapa de una región en 5 horas. Después de trabajar durante 3 horas, el primer avión tuvo dificultades con el motor y el segundo avión tuvo que terminar el trabajo solo, empleando 4½

horas más en esto. ¿En cuánto tiempo haría el trabajo cada uno de los aviones trabajando solo?

21. *A*, *B* y *C* puede hacer cierto trabajo en 10 días. *A* y *B* lo pueden hacer en 12 días y *A* y *C* en 20 días. ¿Cuántos días tomarían cada uno de ellos para hacerlo solo?

22. La diferencia entre las cifras de un número de dos cifras es 3. Invirtiendo las cifras y sumando el número que resulte al número anterior, la suma sería 121. ¿Cuál es el número original?
SUGESTIÓN. Si x es la cifra de decenas e y la cifra de unidades, el número es $10x + y$.

23. La suma de las cifras de un número de tres cifras es 16. Cuando se invierten las cifras y el número resultante se agrega al número original la suma es 1049. Cuando se sustrae el número resultante del número original la diferencia es 297. ¿Qué número es éste?

24. Una vara de 7 pies de largo está sostenida en un punto distante de 6 pulgadas del centro. Se agrega un peso de x libras en la extremidad del brazo más corto de la palanca y un peso de y libras en la otra extremidad. Para que la vara esté equilibrada se necesita añadir un peso de 10 libras a una distancia de 1 pie desde el peso de x libras. Cuando se intercambian los pesos x e y es necesario colocar un peso de 2 libras con el peso de y libras para lograr el equilibrio. Dar x e y (a) sin tomar en cuenta el peso de la varilla y (b) suponiendo que la vara pesa k libras por pie.

25. Un avión hace un viaje de 350 millas en contra del viento en 1 hora y 10 minutos. Regresando con viento de cola tomó 1 hora solamente. Dar la velocidad del avión cuando no hay viento y la velocidad del viento.

26. Una lancha que adelanta a toda velocidad contra la corriente de un río viaja a 14 millas por hora. A media velocidad en contra de la corriente viaja a 10 millas por hora. Dar la velocidad de la corriente y la velocidad máxima de la lancha.

27. Un tren corre en un tramo de vía paralelo a una carretera. Un coche viajando a 60 millas por hora en la misma dirección pasa el tren en 60 segundos. Viajando en dirección contraria el coche pasaría el tren en 7½ segundos. ¿Qué largo tiene el tren y a qué velocidad camina? (Sin tomar en consideración el largo del coche.)

28. *A* y *B* están corriendo en una pista de 8 vueltas para cubrir 1 milla. Si corren en dirección contraria se cruzarán cada 20 segundos. Corriendo en la misma dirección tomará 3 minutos para que *A* alcance *B*. Dar la velocidad de cada uno de los corredores en pies por segundo.

29. Un oficial hizo la primera parte de un viaje en avión, a razón de 300 millas por hora. Al aterrizar, subió a un coche que lo llevó a destinación a la velocidad de 55 millas por hora. El viaje en total re-

quirió 3 horas y 42 minutos. De regreso, el coche viajó a razón de 60 millas por hora y el avión voló a 250 millas por hora. El viaje de regreso necesitó 4 horas y 6 minutos. Dar la distancia total que este oficial voló y la distancia que viajó en coche.

30. Un empleado que regresa a casa en tren después de trabajar en su oficina llega generalmente a su destino a las 5 de la tarde. Su esposa toma su coche para alcanzarlo precisamente cuando llega el tren y llevarlo a su casa. Cierto día, el empleado tomó un tren que lo dejó a su destino una hora antes que de costumbre. Emprende a pie el camino a casa hasta encontrarse con su coche y su esposa. Esta le da vuelta al coche y lleva a su marido en coche el resto del camino, llegando a casa 10 minutos antes de la hora acostumbrada. Decir cuánto tiempo caminó el empleado.

31. Un señor llega a la estación de ferrocarril cercana a su casa de campo 1 hora y 5 minutos antes de la hora que había convenido con su chófer para que lo alcanzara con el coche. Empieza a caminar a razón de 4 millas por hora y encuentra su coche después de caminar 8 millas. Se sube al coche que lo lleva a su casa lo que queda del camino, llegando allí 10 minutos antes de la hora planeada con anterioridad. Dar la distancia de la estación a la casa de campo y la velocidad del coche.

CAPITULO III

Factores

3.1. Polinomios.

Un polinomio, o expresión racional integral, con ciertos variables, por ejemplo x, y, z, es una suma de términos tales como $kx^a y^b z^c$. en la cual a, b, c, son números enteros positivos y k una constante. Las expresiones

$$5x^3 - 7x^2 - 4x + 3 \qquad 6x^3y^2 - 5x^2y + 2y^3$$

son polinomios.

El *grado* de un término de un polinomio es la suma de los exponentes de las letras en el término. Así, $8x^2y^3z$ es del sexto grado en x, y y z, aunque sea del grado 2 en x solo, del grado 3 en y solo y del grado 1 en z solo. Un término que no incluye las letras del polinomio se llama del grado 0. El grado de un polinomio es el que está representado por su término o sus términos del más alto grado.

3.2. Determinación de factores.

Cuando una expresión algebraica es el producto de dos o más expresiones diferentes, cada una de estas demás expresiones se llama factor de la expresión dada. El proceso de determinar los factores de una expresión se llama, a veces, sacar los factores. Una expresión se intitula prima cuando no tiene otros factores que ella misma, o su negación, y 1.

La habilidad para sacar los factores depende de la habilidad para reconocer ciertos productos tipos. Se anotarán en la próxima sección algunos productos tipos importantes.

3.3. Productos tipo.

Los produceos topa importantes que siguen pueden revisarse por medio de una multiplicación, de acuerdo con los métodos explicados en el Capítulo I:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (1)$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (2)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (3)$$
$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad (4)$$
$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd \quad (5)$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \quad (6)$$

Puede ser útil memorizar algunas de estas fórmulas en lenguaje común. Las primeras tres pueden expresarse como sigue:

(1) *El producto de una suma y de la diferencia de dos cantidades es igual a la diferencia de sus cuadrados.*

(2) *El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más dos veces el producto de la primera con la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

(3) *El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, menos dos veces el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

La fórmula (6) puede enunciarse de manera muy general de la manera siguiente:

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de los términos y dos veces el producto de cada término por cada otro, tomados separadamente, del que lo sigue.

Nota. En las fórmulas (1)-(6) las cantidades literales no se restringen a monomios. Por ejemplo: en (1) a podría ser $x + y$, en tal caso tendríamos:

$$(x+y+b)(x+y-b) = [(x+y)+b][(x+y)-b]$$
$$= (x+y)^2 - b^2$$

EJERCICIOS III. A

Dé los productos siguientes:

1. $(m+n)(m-n)$.
2. $(x+5)(x-5)$.
3. $(x+3y)(x-3y)$.
4. $(3x-2y)(3x+2y)$.
5. $(2a-9)(2a+9)$.
6. $(2x^2+3a)(2x^2-3a)$.
7. $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$.
8. $(m^3+n^3)(m^3-n^3)$.
9. $(6xy+uv)(6xy-uv)$.
10. $(abc+d)(abc-d)$.
11. $[(a+b)+c][(a+b)-c]$.

12. $[(u - v) + 6][(u - v) - 6]$.
13. $[3(x + y) + 5][3(x + y) - 5]$.
14. $[(a + b) + (x - y)][(a + b) - (x - y)]$.
15. $[4 - 3(m + n)][4 + 3(m + n)]$.
16. $(p + q + 7r)(p + q - 7r)$.
17. $(a - 2b + 3c)(a - 2b - 3c)$.
18. $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.
19. $[5(p - q) + 6(r + s)][5(p - q) - 6(r + s)]$.
20. $[(3ab - 2c) - (4w + xy)][(3ab - 2c) + (4w + xy)]$.
21. $(u + v)^2$.
22. $(u + 3v)^2$.
23. $(2a + 7b)^2$.
24. $(3x - 2y)^2$.
25. $(5p^2q - 4rs^2)^2$.
26. $(9mn - 8p^2q^2)^2$.
27. $(4ab^2 - 11d^2e)^2$.
28. $(25u^2v - 6wx^5)^2$.
29. $(x + 7)(x + 11)$.
30. $(x + 10)(x - 5)$.
31. $(x - 15)(x - 3)$.
32. $(x - 13)(x + 7)$.
33. $(x + 2b)(x + 3b)$.
34. $(x - 8y)(x - 4y)$.
35. $(5x - 2)(3x + 7)$.
36. $(4x - 3)(10x + 9)$.
37. $(9x - 4)(7x - 6)$.
38. $(12x - 5)(2x + 25)$.
39. $(5x + 2)(3x + 7)$.
40. $(x + 2y)(2x + y)$.
41. $(3x + 2y)(5x - y)$.
42. $(4a - 3b)(7a - 8b)$.
43. $(x - y + z)^2$.
44. $(a + b - 2c)^2$.
45. $(3x + 2y + z)^2$.
46. $(5x - 2y - 3z)^2$.
47. $(a + b + c + d)^2$.
48. $(5a - 2b - c + 4d)^2$.
49. $(r - 2s + 3t - 4u + 5v)^2$.

3.4. Tipos de factores elementales.

En esta sección y en algunas de las secciones siguientes se expondrán algunos de los tipos de factores que ocurren con más frecuencia. Muchos de estos son simplemente el aspecto inverso de los productos tipo expuestos en la sección anterior.

Factor común: *

$$ax + ay = a(x + y). \qquad (1)$$

Ejemplos:

$$8x^3 - 12x^2y = 4x^2(2x - 3y),$$
$$2a^2 + 4ab - 8a^2x = 2a(a + 2b - 4ax),$$
$$r(p + q) - 3(p + q) = (r - 3)(p + q).$$

* Ver párrafo 1.3, la aplicación de las reglas de la multiplicación con respecto a la adición.

Diferencia de dos cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b). \qquad (2)$$

Ejemplo:

$$16x^2 - 25y^2 = (4x + 5y)(4x - 5y).$$

Cuadro perfecto trinomial:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \qquad (3)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2. \qquad (4)$$

Para que un trinomio sea un cuadrado perfecto, uno de sus términos debe ser numéricamente igual a dos veces el producto de las raíces cuadradas de los otros dos términos.

Ejemplos:

$$4m^2 + 20mn + 25n^2 = (2m + 5n)^2,$$
$$49x^2 - 42x + 9 = (7x - 3)^2.$$

Trinomio de la forma:

$$x^2 + (a + b)\ x + ab = (x + a)(x + b). \qquad (5)$$

Ejemplos:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2),$$
$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2),$$
$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1),$$
$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1).$$

Se ha de notar que, sacando factores de este tipo, debemos encontrar dos números cuyo producto es el término constante (es decir el término que no incluye *x*) y cuya suma algebraica es el coeficiente de término de primer grado (es decir el término en *x*).

Cuando el término constante es positivo, estos dos números tendrán el mismo signo, es decir, el del término del primer grado.

Cuando el término constante es negativo, los números tendrán signos opuestos, y el que es más grande numéricamente tendrá el signo del término de primer grado.

Trinomio de la forma:

$$acx^2 + (ad + bc)\ x + bd = (ax + b)(cx + d). \qquad (6)$$

Este es similar a (5).

Ejemplo.

$$6x^2 + 7x - 20 = (2x + 5)(3x - 4).$$

Al determinar los factores de este tipo por inspección pueden escribirse varias posibilidades hasta descubrir la combinación correcta. Por ejemplo, en el ejemplo dado pueden probarse varias combinaciones, tales como $(6x - 1)(x + 20)$, antes de descubrir la forma indicada.

(En el Capítulo VI se podrá ver como los tipos (5) *y* (6) *pueden ser factorizados resolviendo una ecuación cuadrática.)*

Agrupando:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$
$$= (a + b)(x + y). \qquad (7)$$

Ejemplo.

$$ax - 2bx - 3a + 6b = x(a - 2b) - 3(a - 2b)$$
$$= (x - 3)(a - 2b).$$

3.5. Otros tipos complicados.

La suma de dos cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \qquad (1)$$

Ejemplo.

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

Diferencia de dos cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \qquad (2)$$

Ejemplo.

$$27m^3 - 8n^3 = (3m - 2n)(9m^2 + 6mn + 4n^2).$$

La suma de dos potencias impares: La suma de dos potencias impares es siempre divisible por la suma de los números.

Ejemplo.

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^4 + b^4).$$

Notar la forma del segundo factor. Los coeficientes de los varios términos son alternativamente $+1$ y -1; el exponente de a se reduce en 1 de término en término, mientras el exponente de b aumenta en 1 de término en término, b apareciendo primero en el segundo término.

La diferencia de dos potencias impares: La diferencia de dos potencias impares es siempre divisible por la diferencia de los números.

Ejemplo.

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

La diferencia de potencias pares deberá factorizarse como la *diferencia de los cuadrados.*

Ejemplo:

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Cada factor deberá volverse a factorizar, de ser posible, hasta reducir la expresión a factores primos.

La suma de dos potencias pares no puede factorizarse como tal; notar, sin embargo, que

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3 \\ &= (a^2 + b^2)[(a^2)^2 - a^2b^2 + (b^2)^2] \\ &= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4). \end{aligned}$$

3.6. Otros tipos.

Expresión reducible a la diferencia de cuadrados.

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 + 2yz &= x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) \\ &= x^2 - (y - z)^2 \\ &= [x + (y - z)][(y - z)] \\ &= (x + y - z)(x - y + z). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

$$x^4 + 4y^4.$$

Sumar y sustraer $4x^2y^2$:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

$$9x^4 - 6x^2y^2 + 25y^4.$$

Esto sería un perfecto cuadrado si el término de en medio fuera $\pm 30x^2y^2$. Cuando sumamos y restamos $36x^2y^2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 9x^4 - 6x^2y^2 + 25y^4 &= 9x^4 + 30x^2y^2 + 25y^4 - (36x^2y^2) \\ &= (3x^2 + 5y^2)^2 - (6xy)^2 \\ &= (3x^2 + 5y^2 + 6xy)(3x^2 + 5y^2 - 6xy). \end{aligned}$$

Cuadrado perfecto de polinomios:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

Ejemplo.

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 12xz - 6yz + 9z^2 = (2x - y + 3z)^2$$

Sacando factores por división de prueba: A veces, un polinomio como

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3$$

en el cual todos los coeficientes son números enteros, y el término del más alto grado es 1, pueden ser factorizados por inspección. Los factores posibles son $x \pm k$, donde k es un factor del término constante. En este ejemplo los factores posibles son $x + 1$, $x - 1$, $x + 3$, $x - 3$, el último de los cuales es un factor obtenido por división. Este método se discutirá ampliamente en el Capítulo XIII.

3.7. Sugestiones para sacar factores.

Como se indicó con anterioridad, el secreto de poder sacar factores es la habilidad de reconocer las formas típicas. Las sugestiones siguientes pueden ser útiles:

En primer lugar, quitar los factores de monomios u otros factores obvios, si los hay. Puede ser posible, entonces, clasificar la expresión bajo uno de los encabezados siguientes:

Binomios:

Diferencia de cuadrados
Diferencia de cubos
Suma de cubos
Diferencia de potencias impares
Suma de potencias impares
Reducible hasta la diferencia de cuadrados, sumando o sustrayendo un cuadrado perfecto.

Trinomio:

Cuadrado del binomio
Tipos $x^2 + (a + b)x + ab$
Tipos $acx^2 + (ad + bc)x + bd$
Reducible hasta la diferencia de cuadrados, sumando o sustrayendo un cuadrado perfecto

Polinomios de 4 o más términos:

Posibilidad de agruparlos
Reducibles hasta la diferencia de cuadrados por cambio de arreglo
Cubo del binomio
Cuadrado del polinomio
Divisible por $x \pm k$, cuando k es un factor del término constante

Procurar siempre que sea posible que cualquier factor sea factorizado más completamente.

Una revisión es posible multiplicando entre sí los factores obtenidos. El producto debe ser igual a la expresión original, cuando la operación es correcta.

EJERCICIOS III. B

Sacar completamente los factores:

1. $6xyz + 9abx$.
2. $26x^3y^2 + 52x^2y^3 - 39x^2yz$.
3. $51x^3y^2 - 119x^2y^3$.
4. $42abc^2 - 49a^2 - 56ac^3$.
5. $7(a - b) + 3x(a - b)$.
6. $4x(3m - 4n) - 6y(3m - 4n)$.
7. $(p + 3q)5x - (p + 3q)8y$.
8. $(a + 2b)(x - 3y) + (3c + 4d)(x - 3y)$.
9. $36p^2 - 49q^2$.
10. $25a^2b^4 - 64c^6$.
11. $27x^2 - 12y^2$.
12. $a^3b - ab^3$.
13. $(m + n)^2 - 25$.
14. $36p^2 - 49(r + s)^2$.
15. $(9x - y)^2 - (4u + 3v)^2$.
16. $(a + b - 2c + 3d)^2 - (3d + e + 2f - g)^2$.
17. $98a^3 - 72a$.
18. $51ab^2 - 119a^2b^2c - 34ab^4c^2$.
19. $x^2 - 4xy + 4y^2$.
20. $36x^2 + 60xy + 25y^2$.
21. $9m^2 + 48mn + 64n^2$.
22. $8a^4 - 24a^2b + 18b^2$.
23. $x^2 - 10x + 24$.
24. $x^2 - 5x - 24$.
25. $a^2 + 16ab - 36b^2$.
26. $x^2 + 13xy + 40y^2$.
27. $x^4 - 13x^2 + 36$.
28. $2x^2 - 12xy - 54y^2$.
29. $6x^2 - 11x - 10$.
30. $6a^2 - 92ab - 98b^2$.
31. $6p^2 - 9pq - 81q^2$.
32. $6x^4 + bx^2 - 15b^2$.
33. $5x^2 + 26xy + 5y^2$.
34. $18x^2 + 19xy - 12y^2$.
35. $b(ax^2 - c) + x(b^2 - ac)$.
36. $ab(x^2 + 1) + (a^2 + b^2)x$.

37. $x^3 + 2x^2 + x + 2.$
38. $6ax + 4ay - 9bx - 6by.$
39. $ax^2 - 3b - a + 3bx^2.$
40. $a^2 - b^2 + a - b.$
41. $6xy - 4ay + 9ax - 6a^2.$
42. $12abm + 27bm - 8acn - 18cn.$
43. $8x^3 + y^3.$
44. $a^6 - b^3.$
45. $343a^3 - 125b^3.$
46. $192x^3 + 81y^3.$
47. $(a + b)^3 - c^3.$
48. $x^2 - (2y - 3z)^2.$
49. $x^3 + y^3 + 3x + 3y.$
50. $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3.$
51. $x^5 + 32y^5.$
52. $x^6 - 64y^6.$
53. $x^8 - y^8.$
54. $x^8 - 16y^8.$
55. $x^7 + y^7.$
56. $x^7 - y^7.$
57. $x^6 + 27y^6.$
58. $x^6 + y^{12}.$
59. $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab.$
60. $4xy + 9z^2 - x^2 - 4y^2.$
61. $a^2 + b^2 - c^2 - 4d^2 - 2ab - 4cd.$
62. $a^2 + 4b^2 + 4c^2 + d^2 - 4ab + 4ac - 2ad - 8bc + 4bd - 4cd.$
63. $9x^4 + 6x^2y^2 + y^4.$
64. $9x^4 + 11x^2y^2 + 4y^4.$
65. $25x^4 - 24x^2y^2 + 4y^4.$
66. $81x^4 + 63x^2y^2 + 16y^4.$
67. $x^3 - 5x + 4.$
68. $x^3 - 2x - 4.$
69. $x^3 + 2x^2 + 9.$
70. $x^3 + x^2 + 7x + 18.$
71. $x^3 - 4x^2 + 5x + 6.$
72. $x^4 - 8x^2 + 4x + 48.$
73. $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x + 8.$
74. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$
75. $a^9 + b^9.$
76. $x^2z - x^2y + y^2x - y^2z + z^2y - z^2x.$

3.8. El factor común más alto y el múltiplo común más bajo.

El *factor común más alto* (H.C.F.) de dos o más expresiones es la expresión de más alto grado que puede dividirse entre todos exactamente.

El *múltiplo común más bajo* (L.C.M.) de dos o más expresiones es la expresión de grado más bajo que es exactamente divisible entre todos.

Para obtener el H.C.F. y el L.C.M. de dos o más expresiones, se separará cada expresión en sus factores primos. El H.C.F. es el producto formado al tomar cada factor que aparece en todas las expresiones hasta la potencia más baja que aparezca en cualquier expresión. El L.C.M. es el producto formado al tomar cada factor hasta la máxima potencia que aparezca en cualquiera de las expresiones.

Ejemplo 1.

Dar el H.C.F. y el L.C.M. de $2x^2y^3$, $4xy^5$, $18x^7y^2z$.

SOLUCIÓN: Volver a escribir en las formas respectivas:

$$2x^2y^3,\ 2^2xy^5,\ 2 \cdot 3^2x^7y^2z.$$

$$\text{H.C.F.} = 2xy^2.$$

$$\text{L.C.M.} = 2^2 3^2 x^7 y^5 z = 36x^7y^5z.$$

Ejemplo 2.

Dar el H.C.F. y el L.C.M. de

$$x^2 + 2xy + y^2,\ x^2 - y^2,\ x^2 - xy - 2y^2.$$

Solución.

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= (x + y)^2, \\ x^2 - y^2 &= (x + y)(x - y), \\ x^2 - xy - 2y^2 &= (x + y)(x - 2y). \\ \text{H.C.F.} &= x + y. \\ \text{L.C.M.} &= (x + y)^2(x - y)(x - 2y). \end{aligned}$$

EJERCICIOS III. C

1. Comprobar que el producto del factor común más alto y el múltiplo común más bajo de dos expresiones es igual al producto de las dos expresiones.

Dar el factor común más alto y el múltiplo común más bajo de las expresiones siguientes:

2. $26a^2b^3c^4$, $39a^4b^3c^2$.
3. $261x^3y^2z^{10}$, $116x^2y^7z^8w^3$.
4. $a^3 - b^3$, $a^2 - b^2$.
5. $x^2 - 4x - 12$, $x^2 - 9x + 18$.
6. $6x^2 + x - 12$, $8x^2 + 30x + 27$.
7. $a^2 - ab + b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$, $a^3 + b^3$.
8. $2x^2 - 11x + 12$, $3x^2 - 10x - 8$, $x^2 - 11x + 28$.
9. $36x^2 - 84xy + 49y^2$, $42x^2 - 25xy - 28y^2$.
10. $8x^2 + 6xy - 9y^2$, $12x^2 - 17xy + 6y^2$, $9x^2 + 3xy - 6y^2$.
11. $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$, $4a^3 - ab^2$.
12. $a^8 - b^8$, $a^6 - b^6$.
13. $a^8 - b^8$, $a^6 + b^6$.
14. $a^2 + b^2 - 4c^2 - 2ab$, $a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4ac - 4bc$
15. $x^3 - 5x - 12$, $x^3 - 5x^2 + 18$.
16. $16x^4 - 81y^4$, $4x^2 - 9y^2$.
17. $16x^4 + 81y^4$, $4x^2 + 9y^2$.
18. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, $x^3 + 3x^2 - 4$, $x^3 + 3x^2 + 2x$.

CAPITULO IV

Fracciones

4.1. Principios fundamentales.

El valor de una fracción no cambia cuando el numerador y el denominador se multiplican o dividan ambos por el mismo número, exceptuando 0.

NOTA. Las expresiones como $\frac{2x}{3}$, $\frac{2}{3}x$, y $2x/3$ son absolutamente equivalentes.

Este principio se emplea para reducir una fracción a su término más bajo.*

Ejemplo.

Reducir a su término más bajo: $\frac{4x^2y^7z}{6x^5y^3}$.

SOLUCIÓN. Dividir el numerador y el denominador por su H.C.F., $2x^2y^3$, obteniendo

$$\frac{2y^4z}{3x^3}$$

Una fracción puede considerarse como teniendo tres signos asociados a ella: el signo del numerador, el signo del denominador y el signo que precede a la fracción. Algunos o todos estos signos pueden no estar indicados, y en estos casos se consideran, desde luego, como +. Se puede cambiar dos cualquiera de estos signos sin cambiar el valor de la fracción. Así:

$$\frac{n}{d} = -\frac{-n}{d} = -\frac{n}{-d} = \frac{-n}{-d}$$

Esto es una consecuencia directa de las leyes para la división de números con signos. (ver núm. 1.5.)

* Una fracción tiene sus más bajos términos cuando su numerador y su denominador no tienen otro factor común que no sea 1 o −1.

Ejemplo.

Reducir a su término más bajo: $\dfrac{(a+b)(c-d)}{(x+y)(d-c)}$

Solución. El factor $(c-d)$ en el numerador y el factor $(d-c)$ en el denominador son iguales salvo por el signo. Cuando cambiamos $(d-c)$ en el denominador a $(c-d)$, hemos cambiado el signo del denominador, puesto que al cambiar el signo de un solo factor, cambiamos el signo del producto. Podemos compensar este cambio, cambiando el signo que precede a la fracción. Así, la fracción dada es igual a

$$-\frac{(a+b)(c-d)}{(x+y)(c-d)}.$$

Reducido a $\quad -\dfrac{a+b}{x+y}.$

EJERCICIOS IV. A

Reducir a los términos más bajos:

1. $\dfrac{91a^3b^2c^5}{441a^2bc^2}$
2. $\dfrac{153x^7yz^3}{187(xyz)^6}$
3. $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-2x-24}$
4. $\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-9}$
5. $\dfrac{a^2-ab-12b^2}{a^2-2ab-8b^2}.$
6. $\dfrac{16a^2+10ab+b^2}{6a^2+ab-b^2}.$
7. $\dfrac{3a^2+6ab-a-2b}{9a^2-6a+1}$
8. $\dfrac{4a^2-12ab+9b^2}{6a^2+7ab-24b^2}.$
9. $\dfrac{x^4-y^4}{x^3-y^3}.$
10. $\dfrac{x^8-y^8}{x^6-y^6}.$
11. $\dfrac{(x-y)(u-v)}{(x+y)(v-u)}$
12. $\dfrac{a^2-b^2}{b^2-a^2}$
13. $\dfrac{x^4+4}{x^4+2x^3+2x^2}$
14. $\dfrac{a^3+b^3}{(a+b)^3}$
15. $\dfrac{a^6+b^6}{a^4-b^4}.$
16. $\dfrac{a^3+8b^3}{a^3-4ab^2}$
17. $\dfrac{x^3-3x^2-50}{x^3-3x-110}.$
18. $\dfrac{x^3-3x^2-16}{x^3+4x^2-32x}$
19. $\dfrac{x^3+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$
20. $\dfrac{x^3-4x^2-11x+30}{x^3+6x^2-x-30}$
21. $\dfrac{a^2-b^2-c^2+2bc}{a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc}$

4.2. Adición y sustracción de fracciones.

Para sumar o sustraer fracciones que tienen un denominador común, sumar o sustraer los numeradores y colocar el resultado encima del denominador común.

Ejemplo 1.

$$\frac{3b}{7a} + \frac{5b}{7a} = \frac{8b}{7a}$$

Ejemplo 2.

$$\frac{2x}{3z^2} - \frac{5y}{3z^2} = \frac{2x - 5y}{3z^2}$$

Para sumar o sustraer fracciones que no tienen un denominador común, es preciso reducirlas a fracciones con un denominador común. Es generalmente más fácil emplear el *denominador común más bajo* (DCMB), es decir el múltiple común más bajo de sus denominadores. Se obtiene esto empleando el principio fundamental núm. 4.1.

Ejemplo 3.

Sumar las fracciones $\frac{7}{10x}$ y $\frac{2}{15x^2}$.

Solución. El DCMB es $30x^2$ (ver núm. 3.8). Para reducir el primer denominador al DCMB es neecsario multiplicarlo por el factor $3x$ (que se encuentra al dividir el DCMB, $30x^2$, por el denominador $10x$). Multiplicamos ambos, numerador y denominador de la primera fracción por $3x$, lo que, de acuerdo con el principio fundamental del núm. 4.1. no cambia su valor.

Igualmente, multiplicamos tanto el numerador como el denominador de la segunda fracción por 2 (puesto que $30x^2 \div 15x^2 = 2$).

La suma requerida es:

$$\frac{7}{10x} + \frac{2}{15x^2} = \frac{3x \cdot 7}{3x \cdot 10x^2} + \frac{2 \quad 2}{2 \cdot 15x^2} = \frac{21x + 4}{30x^2}$$

La línea divisora de una fracción juega el mismo papel que los signos de agrupamiento colocados alrededor del numerador.

Ejemplo 4.

$$\frac{5}{6x} - \frac{x-2}{4x^2} = \frac{2x \cdot 5 - 3(x-2)}{12x^2} = \frac{10x - 3x + 6}{12x^2} = \frac{7x + 6}{12x^2}.$$

Ejemplo 5.

Combinar en una sola fracción:

$$\frac{3a}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{2}{a + b}$$

Solución. Escribir las fracciones con sus denominadores reducidos a factores:

$$\frac{3a}{(a + b)(a - b)} + \frac{b}{(a + b)^2} + \frac{2}{a + b}.$$

$$\text{DCMB} = (a + b)^2(a - b)$$

La fracción deseada es

$$\frac{3a(a + b) + b(a - b) - 2(a + b)(a - b)}{(a + b)^2(a - b)}$$

$$= \frac{3a^2 + 3ab + ab - b^2 - 2a^2 + 2b^2}{(a + b)^2(a - b)}$$

$$= \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a + b)^2(a - b)}$$

4.3. Expresiones mixtas.

Una *expresión mixta* es la suma de un polinomio (o de un monomio) y una fracción. Corresponde a un número mixto como $2\frac{3}{4}$ en aritmética. Las expresiones siguientes son mixtas:

$$3a + \frac{2b}{5c} \qquad x^2 + 2x - 4 - \frac{5}{x - 3}$$

Para reducir una expresión mixta a una fracción, escribir la parte integral (es decir la parte que no es fracción) como una fracción con el denominador 1 y proceda después como en la suma de fracciones.

Ejemplo 1.

Reducir a una fracción: $3a + \frac{2b}{5c}$.

Solución.

$$3a + \frac{2b}{5c} = \frac{3a}{1} + \frac{2b}{5c} = \frac{3a \cdot 5c + 2b}{5c} = \frac{15ac + 2b}{5c}$$

Ejemplo 2.

Reducir a una fracción: $3x - 2 + \dfrac{6}{x+4}$.

SOLUCIÓN.

$$3x - 2 + \frac{6}{x+4} = \frac{3x-2}{1} + \frac{6}{x+4} = \frac{(3x-2)(x+4)+6}{x+4}$$
$$= \frac{3x^2+10x-8+6}{x+4} = \frac{3x^2+10x-2}{x+4}.$$

Una fracción impropia en álgebra es una en la cual el denominador es un polinomio cuyo grado es menor o igual al grado del numerador. Para reducir esta fracción a una expresión mixta es sencillamente efectuar un problema de división.

Ejemplo.

Reducir a expresión mixta: $\dfrac{6x^2+x-5}{2x+3}$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 4 \\ 2x+3 & 6x^2 + x - 5 \\ & 6x^2 + 9x \\ \hline & -8x - 5 \\ & -8x - 12 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$$\frac{6x^2+x-5}{2x+3} = 3x - 4 + \frac{7}{2x+3}$$

EJERCICIOS IV. B

Combinar en una fracción única:

1. $\dfrac{2}{3x} + \dfrac{3}{4x}$.
2. $\dfrac{a}{4b^2} + \dfrac{c}{6b}$.
3. $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ac}$.
4. $\dfrac{5}{36a^2} + \dfrac{1}{24a^3}$
5. $\dfrac{9z}{16x^3y^2} + \dfrac{7z}{18xy^4}$.
6. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d}$.
7. $\dfrac{3}{4xy} - \dfrac{5}{6yz} + \dfrac{7}{8xz}$.
8. $\dfrac{3}{x+y} - \dfrac{2}{x-y}$.
9. $\dfrac{6}{x^2-y^2} + \dfrac{5}{(x-y)^2}$.
10. $\dfrac{4}{x-2y} - \dfrac{3}{2x+y}$.
11. $\dfrac{10a}{2a-3b} - \dfrac{5b}{3a+4b}$.
12. $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{3}{x^2-y^2}$

13. $\dfrac{1}{x^2 - y^2} - \dfrac{1}{x^2 - 2xy + y^2}$.

14. $\dfrac{2x}{x^2 - 7x + 12} - \dfrac{5}{x^2 - 2x - 8}$.

15. $\dfrac{3}{a - b} - \dfrac{2}{b - a}$.

Solución. Cambiar el signo del denominador de la segunda fracción y cambiar el signo que la precede. Entonces tenemos:

$$\frac{3}{a - b} + \frac{2}{a - b} = \frac{5}{a - b}.$$

16. $\dfrac{x}{x - y} - \dfrac{y}{y - x}$.

17. $\dfrac{3}{5a - 4b} + \dfrac{2}{4b - 5a}$.

18. $\dfrac{3a + 2b}{a^2 - b^2} - \dfrac{5}{a - b} + \dfrac{4}{b - a}$.

19. $\dfrac{7x - 3}{x + 3} - \dfrac{2x - 5}{2x + 5}$.

20. $\dfrac{5x + 6y}{6x + 5y} + \dfrac{3x - 4y}{2x + 3y}$.

21. $\dfrac{x + 2}{6x^2 + 19x + 15} - \dfrac{2x - 5}{9x^2 + 9x - 10}$.

22. $\dfrac{3}{(a - b)(b - c)} + \dfrac{4}{(b - c)(c - a)} - \dfrac{5}{(c - a)(a - b)}$

23. $\dfrac{a - c}{(a + b)(b + c)} + \dfrac{b - a}{(b + c)(c + a)} + \dfrac{c - b}{(c + a)(a + b)}$

24. $5x + \dfrac{z}{6y}$.

25. $4a - \dfrac{2c}{3b}$.

26. $y + \dfrac{x - yz}{z}$.

27. $3x + 5 + \dfrac{25}{3x - 5}$

28. $2a - 7b - \dfrac{4(a^2 - 16b^2)}{2a - 3b}$

29. $\dfrac{5}{x - 2} - \dfrac{3}{x + 7} + 2$.

30. $11x - 2y - \dfrac{4x - 3y}{2x - 3y}$

Reducir a expresiones mixtas:

31. $\dfrac{x + 5}{x + 2}$.

32. $\dfrac{6x - 7}{2x - 11}$.

33. $\dfrac{2x - 13}{3x + 8}$.

34. $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x + 3}$.

35. $\dfrac{12x^2 - 7x - 20}{3x + 4}$.

36. $\dfrac{8x^3 + 7x + 6}{2x^2 + 5}$

37. $\dfrac{15x^2 + 6x - 20}{5x^2 - x - 2}$.

38. $\dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 2}$.

39. $\dfrac{2x^3 - 70x^2 + 10x - 3}{x^2 + 3x - 4}$.

40. $\dfrac{8x^3 - 6x^2 - 7x + 8}{4x^3 + x^2 - 2x - 18}$.

4.4.˙ Multiplicación de fracciones.

Para multiplicar fracciones, multiplicar sus numeradores para obtener el numerador del producto y multiplicar sus denominadores para obtener el denominador del producto. Los factores comunes al numerador y al denominador deberán, desde luego, dividirse.

Ejemplos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a^5}{b^3}\cdot\frac{bx^2}{a^4y} = \frac{ax^2}{b^2y} \qquad x\cdot\frac{y}{z} = \frac{x}{1}\cdot\frac{y}{z} = \frac{xy}{z},$$

$$\frac{x^2 - y^2}{xy}\cdot\frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(x + y)(x - y)}{xy}\cdot\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2}$$
$$= \frac{(x - y)(x^2 + y^2)}{xy(x + y)}.$$

4.5. Potencias de fracciones.

La potencia de una fracción es igua a la potencia de su numerador dividida por la potencia de su denominador. Así, por ejemplo,

$$\left(\frac{n}{d}\right)^3 = \frac{n}{d}\cdot\frac{n}{d}\cdot\frac{n}{d} = \frac{n^3}{d^3}.$$

4.6. Divisiones de fracciones.

Puesto que, por el principio fundamental del núm. 4.1,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c},$$

tenemos la regla ya conocida:

Para dividir una fracción por otra, invertir el divisor y multiplicar.

Ejemplos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad \frac{y}{z}\,x \div \frac{x}{1} = \frac{y}{z}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{xz},$$

$$\frac{(r+s)^2}{r-s} \div \frac{rs}{r^2-s^2} = \frac{(r+s)^2}{r-s}\,\frac{(r+s)(r-s)}{rs} = \frac{(r+s)^3}{rs}.$$

Cuando la división involucra expresiones mixtas es conveniente generalmente reducirlas a fracciones antes de proceder con la división, como en el ejemplo siguiente que, de todos modos, puede resolverse por medio del método expuesto en el núm. 4.7.

Ejemplo.

$$\left(4-\frac{5}{x}\right) \div \left(4+\frac{5}{x}\right) = \frac{4x-5}{x} \div \frac{4x+5}{x} = \frac{4x-5}{x}\cdot\frac{x}{4x+5}$$
$$= \frac{4x-5}{4x+5}$$

EJERCICIOS IV. C

Resolver las operaciones indicadas y simplificar:

1. $\dfrac{24a^4b^2c^3}{25xy^2z^2}\cdot\dfrac{15x^3y^3z^3}{16a^2b^3c^2}$.

2. $\dfrac{p^2-q^2}{m^2-n^2}\cdot\dfrac{m^2+2mn=n^2}{3p^2+3pq-q^2}$.

3. $\dfrac{x^2+2x-48}{x^3+27}\cdot\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-8x+12}$.

4. $\dfrac{8a^2+2ab-15b^2}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{4a^2-ab-5b^2}$.

5. $\dfrac{a^4+4}{a^2-4}\cdot\dfrac{a^2+4a+4}{a^2+2a+2}$.

6. $\dfrac{6r^2+59rs-10s^2}{8r^2-6rs-9s^2}\cdot\dfrac{9s^2-4r^2}{s^2-36r^2}$.

7. $\dfrac{2x^2+5x-3}{16x^2+26x+9}\cdot\dfrac{10x^2+13x+4}{5x^2+11x-12}\cdot\dfrac{35x^2-38x+8}{x^2+x-2}$.

8. $\dfrac{3x^2+11xy+10y^2}{3x^2+8xy-35y^2}\cdot\dfrac{6x^2+29xy-5y^2}{3x^2-19xy-40y^2}\cdot\dfrac{3x^2-31xy+56y^2}{x^2-4y^2}$.

9. $\dfrac{a^4-b^4}{x^3-y^3}\div\dfrac{a^2-b^2}{x^2-y^2}$.

10. $\dfrac{x^2-10x+24}{x^2+10x+24}\div\dfrac{x^2+4x-32}{x^2+4x-12}$.

11. $\dfrac{x^2-9xy-36y^2}{x^2-7xy-18y^2}\div\dfrac{x^2+9xy+18y^2}{x^2-6xy-16y^2}$

12. $\dfrac{30x^2+71x+42}{8x^2+65x+8}\div\dfrac{18x^2+33x+14}{24x^2+35x+4}$

13. $\dfrac{15x^2 - 11xy - 12y^2}{4x^2 + 4xy - 35y^2} \div \dfrac{10x^2 + 61xy + 33y^2}{8x^2 + 46xy + 63y^2}$.

14. $\left(a - \dfrac{b}{c}\right) \div \left(c - \dfrac{b}{a}\right)$.

15. $\left(1 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{a^2}{b^2}\right) \div \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)$.

16. $\left(1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a^2}{b^2}\right) \div \left(\dfrac{1}{a^3} \div \dfrac{1}{b^3}\right)$.

17. $\left(\dfrac{ab^2c^3}{x^2y^2z^3} \div \dfrac{a^2b^3c^7}{xy^3z^3}\right) \div \dfrac{abc^2}{x^2y^2z}$.

18. $\dfrac{ab^2c^4}{x^2y^2z^3} \div \left(\dfrac{a^2b^3c^7}{xy^3z^3} \div \dfrac{abc^2}{x^2y^2z}\right)$.

4.7. Fracciones complejas.

Una fracción compleja es una fracción que tiene una o más fracciones en su numerador o en su denominador o en ambos. Los métodos para simplificar las fracciones complejas se ilustran por los ejemplos siguientes. Un método muy útil consiste en multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción compleja por el común denominador más bajo de las fracciones simples que se encuentran en la fracción compleja.

Ejemplo 1.

Simplificar: $\dfrac{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6}}{1 - \dfrac{3}{4}}$.

Solución. El C.D.M.B. de las fracciones que se encuentran en el numerador y en el denominador es 12. Multiplicar el numerador y el denominador por 12:

$$\frac{12 \cdot \dfrac{2}{3} + 12 \cdot \dfrac{1}{6}}{12 \cdot 1 - 12 \cdot \dfrac{3}{4}} = \frac{8 + 2}{12 - 9} = \frac{10}{3}$$

Ejemplo 2.

Simplificar: $$\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}.$$

SOLUCIÓN. Multiplicar el numerador y el denominador por el C.D.M.B. de las fracciones presentes en el numerador y el denominador, es decir *ab:*

$$\frac{ab\,.\,\frac{a}{b}+ab\,.\,1}{ab\,.\,\frac{b}{a}-ab\,.\,\frac{a}{b}}=\frac{a^2+ab}{b^2+a^2}=\frac{a(a+b)}{(b+a)(b-a)}=\frac{a}{b-a}.$$

Ejemplo 3.

Simplificar: $$\frac{\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}}$$

SOLUCIÓN. Multiplicar el numerador y el denominador por el C.D.M.B. de las fracciones en el numerador y en el denominador, es decir $(x+1)(x-1)$:

$$\frac{(x+1)(x-1)\,\frac{x}{x^2-1}-(x+1)(x-1)\,\frac{1}{x+1}}{(x+1)(x-1)\,\frac{x}{x-1}+(x+1)(x-1)\,\frac{1}{x+1}}$$
$$=\frac{x-(x-1)}{(x+1)x+(x-1)}=\frac{x-x+1}{x^2+x+x-1}=\frac{1}{x^2+2x-1}.$$

Ejemplo 4.

Simplificar: $$\frac{1}{2a-\frac{1}{2a-\frac{a+1}{a}}}. \tag{1}$$

SOLUCIÓN. Considerar la fracción

$$\frac{1}{2a-\frac{a+1}{a}}, \tag{2}$$

que se encuentra en el denominador. El C.D.M.B. de las fracciones que aparecen en el numerador y en el denominador de la fracción (2) es a (puesto que hay solamente una fracción y que su denominador es a). Multiplicar el numerador y el denominador de (2) por a. Lo que reduce (2) a

$$\frac{a}{2a^2 - a - 1}. \tag{3}$$

Sustituir (3) en el lugar correcto en (1), que llega a ser

$$\frac{1}{2a - \dfrac{a}{2a^2 - a - 1}}. \tag{4}$$

El C.D.M.B. de las fracciones que se encuentran en el numerador y en el denominador de (4) es $2a^2 - a - 1$. Multiplicando el numerador y el denominador por esto da

$$\frac{2a^2 - a - 1}{4a^3 - 2a^2 - 3a}. \tag{5}$$

Un resultado en forma fraccionaria debería siempre deducirse a sus términos más bajos. Consecuentemente, debe investigarse cada uno de estos resultados para ver si puede reducirse. Cuando el numerador y el denominador de la fracción (5) se factorizan, (5) toma la forma de

$$\frac{(2a + 1)(a - 1)}{a(4a^2 - 2a - 3)}. \tag{6}$$

y puesto que no hay factor común para el numerador y el denominador, la fracción ya se encuentra en su término más bajo y no puede reducirse. Tanto (5) como (6) son formas aceptables del resultado.

EJERCICIOS IV. D

Simplificar:

1. $\dfrac{\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{6}}{\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2}}$.

2. $\dfrac{\dfrac{2}{a} - \dfrac{3}{b}}{\dfrac{4}{a} + \dfrac{5}{b}}$.

3. $\dfrac{a + \dfrac{b}{c}}{c + \dfrac{b}{a}}$.

4. $\dfrac{\dfrac{1}{x + y} + \dfrac{1}{x - y}}{\dfrac{1}{x^2 - y^2} - \dfrac{1}{x + y}}$.

5. $\dfrac{b + \dfrac{a}{b - a}}{\dfrac{a}{a - b} - b}$.

6. $\dfrac{a - 6 + \dfrac{9}{a}}{a - \dfrac{9}{a}}$.

7. $\dfrac{\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{4}{x-3}}{\dfrac{x-27}{x^2-3x}}$.

8. $\dfrac{x}{\dfrac{1+\dfrac{2}{3-x}}{2}}$.

9. $\dfrac{5}{2-\dfrac{3}{4-\dfrac{5}{x}}}$.

10. $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.

11. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}}$.

12. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+3}{x+2-\dfrac{x}{3x+\dfrac{x-1}{x}}}$.

13. $\dfrac{x-2y}{x-2y-\dfrac{1}{x+2y+\dfrac{1}{x-2y}}}$.

14. $\dfrac{\dfrac{a+b}{a^2+b^2}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{a+b}{a^2+b^2}-\dfrac{1}{b}}-\dfrac{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b}}$.

15. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+3}{x+4}}{\dfrac{x+5}{x+6}-\dfrac{x+7}{x+8}}\div\dfrac{\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x-3}{x+4}}{\dfrac{x-5}{x+6}-\dfrac{x-7}{x+8}}$.

4.8. Raíces extrañas.

En el núm. 2.3 se especificó que una ecuación equivalente se obtiene cuando los lados de determinada ecuación se aumentan o se disminuyen por el mismo número o la misma expresión, o cuando se multiplican o se dividen por el mismo número o la misma expresión, a condición de que, en el caso de la multiplicación o de la división, este número o expresión no sea cero o no contenga alguna incógnita.

Ciertas operaciones, cuando se formulan en una ecuación, pueden llevar a producir una ecuación que contenga *raíces extrañas*, es decir

raíces que no son las raíces de la ecuación original. Las operaciones siguientes, en especial, pueden producir raíces extrañas:

Cuando se multiplica ambos lados por una expresión que contenga una incógnita.

Elevando ambos lados a la misma potencia.

Es, por lo tanto, absolutamente necesario revisar los valores obtenidos al resolver una ecuación y cuando hay que resolver cualquiera de estas dos operaciones. Aunque el cálculo haya sido correcto, es posible que algunas de las raíces sean extrañas y, en este caso, tendrán que desecharse.

Ejemplo 1.

La ecuación $x + 2 = 5$ tiene solamente la raíz $x = 3$. Multiplicando ambos lados por $x - 2$, se obtiene $x^2 - 4 = 5x - 10$. La nueva ecuación tiene las raíces $x = 3$ y $x = 2$, lo que puede verificarse por substitución. Es así como se ha introducido la raíz extraña $x = 2$.

Ejemplo 2.

La ecuación $x + 2 = 5$ tiene solamente una raíz, $x = 3$.

Al hacer el cuadrado de ambos lados se obtiene $x^2 + 4x + 4 = 25$. La nueva ecuación tiene las raíces $x = 3$ y $x = -7$, siendo esta última una raíz extraña introducida al dar el cuadrado.

Cuando los dos lados de una ecuación se dividen por una expresión que contiene la incógnita, puede perderse una raíz.

Ejemplo 3.

La ecuación $x^2 - 4 = 5x - 10$ tiene las raíces $x = 3$ y $x = 2$, como puede verificarse por sustitución. Al dividir ambos lados por $x - 2$, se obtiene $x + 2 = 5$. Esta ecuación tiene la única raíz $x = 3$, habiéndose perdido la raíz $x = 2$.

Ejemplo 4.

La ecuación $x^3 = 25x$ tiene como raíces $x = 0$, $x = 5$ y $x = -5$. Al dividir ambos lados por x, se obtiene $x^2 = 25$. Esta ecuación tiene solamente las raíces $x = 5$ y $x = -5$; la raíz $x = 0$ se ha perdido.

4.9. Ecuaciones que incluyen fracciones.

Cuando resolvemos una ecuación que contiene fracciones, eliminamos generalmente las fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por el denominador común más bajo. Cuando se emplea un denominador común diferente del más bajo como multiplicador, es muy probable que se presenten raíces extrañas. Cuando los dos lados de una

ecuación se multiplican por el denominador común más bajo de las fracciones presentes, cualquier raíz de la ecuación resultante es asimismo una raíz de la ecuación original, a condición de que no produzca, cuando se sustituye, ningún denominador de la ecuación original que sea igual a cero.

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x^2-9}.$$

Solución. Limpiar la ecuación de fracciones multiplicando ambos lados por el D.C.M.B. $(x+3)(x-3)$:

$$x - 3 + x + 3 = 2,$$
$$2x = 2, \quad x = 1.$$

Revisión. Sustituir $x = 1$ en la ecuación original:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{8},$$
$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{x^2-9}.$$

Solución. Limpiar de fracciones multiplicando por $(x + 3)$ $(x - 3)$:

$$x - 3 + x + 3 = 6,$$
$$2x = 6, \quad x = 3.$$

Cuando tratamos de sustituir el valor $x = 3$ en la ecuación original obtenemos

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{0} = \frac{6}{0}.$$

Pero la división por cero no tiene sentido; por lo tanto $x = 3$ no es una raíz de la ecuación original. De hecho, la ecuación no tiene raíz.

EJERCICIOS IV. E

Resolver:

1. $\dfrac{3}{x-7} - \dfrac{5}{x+7} = 0.$
2. $\dfrac{x}{3x+7} + \dfrac{5}{x+5} = \dfrac{1}{3}.$
3. $\dfrac{3x}{x-4} - \dfrac{4}{x+5} = 3.$
4. $\dfrac{x-4}{x+4} - \dfrac{2}{x-4} = 1.$
5. $\dfrac{14}{x^2-9} - \dfrac{7}{x+3} = \dfrac{1}{x-3}.$
6. $\dfrac{x}{3x+4} + \dfrac{2}{5x+7} = \dfrac{1}{3}.$
7. $\dfrac{2}{2x+3} + \dfrac{3}{2x-3} = \dfrac{12}{9-4x^2}.$
8. $\dfrac{5}{x^2-9} + \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{2}{x-3}.$
9. $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{7}{y-4} = 0,$ $\quad \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y+4} = 0.$
10. $\dfrac{1}{3x+7} - \dfrac{1}{5y-6} = 0.$ $\quad \dfrac{1}{2x-2} + \dfrac{4}{3y+10} = 0.$
11. $\dfrac{x}{x-6} + \dfrac{y}{y-3} = 2,$ $\quad \dfrac{2x+3}{x} - \dfrac{3y+3}{y} = -1.$
12. $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{y}{y+1} = 2,$ $\quad \dfrac{2x}{3x+1} - \dfrac{y}{2y-1} = \dfrac{1}{6}.$
13. Resolver por z: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}.$
14. Resolver por r: $I = \dfrac{2E}{R+2r}.$
15. Resolver por T: $H = \dfrac{v}{825}\left(T - \dfrac{wv^2}{g}\right).$
16. Resolver por P: $T = \dfrac{1}{R}\left(P + \dfrac{a}{v^2}\right)(v-b).$
17. Encontrar un número que, cuando se sustrae del numerador y se agrega al denominador, cambia la fracción $19/29$ en una fracción cuyo valor es $3/5$.
18. Si se añade 5 al numerador y al denominador de una fracción el valor del resultado es $5/7$. Si se sustrae 5 del numerador y del denominador de la fracción el valor del resultado es $3/5$. ¿Cuál es esta fracción?
19. Un automovilista sale de A a cierta velocidad y hubiera alcanzado B en 4 horas y 48 minutos si hubiera seguido a la misma velocidad. Pero, cuando ya había viajado las tres cuartas partes del camino tuvo dificultades con su motor que lo detuvieron por 1 hora. Durante el resto del viaje aumentó su velocidad en 10 millas por hora y llegó finalmente a B con 48 minutos de atraso. Dar la distancia entre A y B, y la velocidad con la cual el automovilista empezó su viaje.

CAPITULO V

Exponentes y radicales

5.1. Leyes de los exponentes.

El tema de los exponentes se expuso brevemente en el Capítulo I (núms. 1.7, 1.9 y 1.10). Resumimos aquí las leyes de los exponentes. Los números m y n representan integrantes positivos; a y b pueden ser cualesquiera expresiones algebraicas, con excepción de que al aparecer cualquiera de las dos en un denominador, no puede ser cero.

$$a^m a^n = a^{m+n}. \tag{1}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{2}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{cuando } m > n, \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{cuando } m < n. \end{cases} \tag{3}$$

El símbolo $>$ quiere decir "más grande que", el símbolo $<$ "menos grande que",*

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{5}$$

En este capítulo ampliaremos la definición de exponentes hasta ocuparnos de casos en que no son integrantes positivos.

5.2. Raíces.

Cuando $x^n = a$, donde n es un integrante positivo y a es un número real (es decir, cualquier número positivo o negativo o cero),

* Los demás símbolos que se emplean ocasionalmente son:
$\geq$ que significa "es mayor que o igual a".
$\leqslant$ " " "es menor que o igual a".
$\ngtr$ " " "no es más grande que".
$\nless$ " " "no es menor de".

se dice entonces que x es la n^a raíz de a. En particular, si $n = 2$, x es una raíz cuadrada de a; si $n = 3$, x es una raíz cúbica de a.

Ejemplos.

Puesto que $2^3 = 8$, 2 es la raíz cúbica de 8.

Puesto que $3^2 = 9$, 3 es la raíz cuadrada de 9; puesto que $(-3)^2 = 9$, -3 es también raíz cuadrada de 9.

Puesto que $(-5)^3 = -125$, -5 es la raíz cúbica de -125.

Se verá en el Capítulo XII que cada número exceptuando cero tiene exactamente n distintas n^{as} raíces si incluimos números imaginarios (ver núm. 5.16). Algunos números no tienen ningunas n^{as} raíces reales para ciertos valores de n. Por ejemplo, -4 no tiene ninguna raíz cuadrada real, puesto que el cuadrado de cualquier número real (exceptuando cero) es positivo. De momento consideraremos solamente los valores de n y de a para los cuales existe una raíz real.

Cuando a tiene una n^a raíz positiva o cero, esta raíz se llama la principal n^a raíz de a. Cuando a no tiene una n^a raíz positiva, pero tiene una n^a raíz negativa, la n^a raíz negativa es la principal n^a raíz de a. Así, la raíz cuadrada principal de 9 es 3, aunque tanto 3 como -3 son raíces cuadradas de 9; la raíz cúbica principal de 8 es 2, la raíz cúbica principal de -8 es -2.

De acuerdo con las definiciones anteriores, la principal n^a raíz de a es la n^a raíz positiva de a cuando a es positivo y la n^a raíz negativa de a cuando a es negativo y n es impar. No damos definición de la n^a raíz principal en el caso en que a es negativo y n es par.

5.3. Radicales.

La principal n^a raíz de a se indica por medio del símbolo $\sqrt[n]{a}$. Este símbolo se llama un *radical*. El integrante n es el *índice*, u *orden*, del radical. El número a, debajo del signo del radical es el *radicando*. Cuando no se indica ningún índice, se supone que es 2; es decir que el símbolo $\sqrt{a}$ representa la raíz cuadrada principal de a.

El símbolo $\sqrt{9}$ es igual a 3 y no es igual a -3, aunque -3 sea una de las raíces cuadradas de 9. Sin embargo, se permite decir que las raíces cuadradas de 9 son ± 3, el símbolo $\pm$ teniendo el significado de "más y menos". (En ciertas situaciones este símbolo debe leerse de preferencia como "más o menos".)

Nota. Se supone, de momento, que cuando el índice de un radical es par, todos los factores literales en el radicando son positivos.

EJERCICIOS V. A

Dar las siguientes raíces:

1. $\sqrt{16a^{16}}$.	2. $\sqrt[3]{27a^{6}}$.	3. $\sqrt[3]{-8x^{9}}$.	4. $\sqrt{4a^{4}}$.
5. $\sqrt[3]{27x^{27}}$.	6. $\sqrt[3]{-1000x^{6}}$.	7. $\sqrt{0.01x^{4}}$.	8. $\sqrt[3]{0.001x^{9}}$.
9. $\sqrt{36a^{6}}$.	10. $\sqrt[3]{125a^{6}}$.	11. $\sqrt{64x^{6}}$.	12. $\sqrt[3]{64x^{6}}$.
13. $\sqrt[6]{64x^{6}}$.	14. $\sqrt{a^2b^4c^6}$.	15. $\sqrt[5]{32a^{10}}$.	16. $\sqrt[3]{-216a^{15}}$.
17. $\sqrt{\dfrac{25a^6}{289b^4}}$.	18. $\sqrt{\dfrac{49}{169}\,x^8}$.	19. $\sqrt[3]{-\dfrac{216x^6}{125y^{12}}}$.	20. $\sqrt[5]{\dfrac{-32x^{10}}{243y^{15}}}$.
21. $\sqrt[7]{-a^7b^{14}c^{21}}$.	22. $\sqrt[3]{\sqrt{15625a^{12}}}$.	23. $\sqrt{\sqrt[3]{64x^{60}}}$.	24. $\sqrt[4]{16a^{16}}$.

5.4. Exponentes fraccionales.

En esta y las próximas secciones, ampliaremos la notación del exponente, dando, hasta donde sea posible, un significado a a^m, siendo m cualquier número racional. Esta ampliación se guía completamente en la suposición de que las leyes de los exponentes del núm. 5.1 tienen todavía validez, hasta cuando m y n no son integrantes positivos.

En primer lugar investigamos qué significado debe atribuirse al símbolo $a^{1/2}$. Suponiendo que (2) del núm. 5.1 tiene aún valor, obtenemos

$$(a^{1/2})^2 = a^{(1/2).2} = a^1 = a.$$

De esta manera $a^{1/2}$ podría ser cualquier raíz cuadrada de a. Para simplificar, definimos

$$a^{1/2} = \sqrt{a}, \qquad a \geqq 0.$$

Es decir que $a^{1/2}$ será la raíz cuadrada principal de a. De la misma manera puesto que la suposición de que (2) tiene todavía validez, nos lleva a la ecuación

$$(a^{1/n}) = a,$$

definimos

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Es decir que $a^{1/n}$ es la principal n^a raíz de a. Cuando a es negativo y n es par, no se da ningún significado a $a^{1/n}$.

Otra vez, hagamos que m y n sean integrantes positivos sin factor

común que no sea 1. Suponiendo que (2) del núm. 5.1 pueda aplicarse, tenemos

$$(a^{1/n})^m = a^{m/n},$$

que nos lleva a definir

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Aquí también, cuando a es negativo y n es par, no asignamos ningún significado al símbolo.

Ejemplos.

$$(25)^{1/2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3.$$

$$8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4.$$

5.5. Exponente cero.

Cuando suponemos que la relación $a^m/a^n = a^{m-n}$ todavía tiene validez cuando $m = n$, llegamos al resultado

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

Pero

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 \quad \text{cuando} \quad a \neq 0.$$

Consecuentemente, definimos

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

No le damos ningún significado al símbolo 0^0.

Ejemplos.

$2^0 = 1, \quad (2x)^0 = 1 \ (x \neq 0), \quad 2x^0 = 2 \cdot 1 = 2 \ (x \neq 0).$

5.6. Exponentes negativos.

Finalmente, vamos a suponer que la relación $a^m/a^n = a^{m-n}$ tiene validez, hasta cuando $m < n$. Si, por ejemplo, establecemos que $m = 4$, $n = 7$, obtenemos

$$\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}.$$

Pero

$$\frac{a^4}{a^7} = \frac{1}{a^3},$$

y si los dos resultados son consistentes debemos tener $a^{-3} = 1/a^3$. En general definimos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a \neq 0. \tag{1}$$

Ejemplos.

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, \qquad 5^2 = \frac{1}{5^{-2}},$$

$$9^{-1/2} = \frac{1}{9^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3},$$

$$(27)^{-2/3} = \frac{1}{(27)^{2/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(2x)^{-3} = \frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{8x^3}$$

$$2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

$$\left(\frac{8x^{-6}y^3}{27p^{-9}q^6}\right)^{2/3} = \frac{8^{2/3}x^{-4}y^2}{(27)^{2/3}p^{-6}q^4}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{8})^2p^6y^2}{(\sqrt[3]{27})^2q^4x^4} = \frac{4p^6y^2}{9q^4x^4}.$$

EJERCICIOS V. B

Resolver las operaciones indicadas, simplificando los resultados cuando sea posible:

1. $(49)^{1/2}$.
2. $(-125)^{1/3}$.
3. $(16x^{16})^{1/4}$.
4. $(36x^{12})^{1/2}$.
5. $(64x^6)^{1/2}$.
6. $(64x^6)^{1/3}$.
7. $(64x^6)^{1/6}$.
8. $(36x^{36})^{1/2}$.
9. $(23x)^0$.
10. $23x^0$.
11. $13x^{-1}$.
12. $(13x)^{-1}$.
13. $(2x)^{-3}$.
14. $2x^{-3}$.
15. $\frac{1}{2}x^{1/2} \cdot \frac{1}{4}x^{1/4}$.
16. $\frac{1}{2}x^{1/2} \div \frac{1}{4}x^{1/4}$
17. $(\frac{1}{2}x^{1/2})^2$.
18. $(\frac{1}{2}x^{1/2})^{-2}$.
19. $(-27a^{27})^{-1/3}$.
20. $(9a^4)^{-1/2}$.

21. $(4a^4)^{3/2}$.
22. $(-8a^9)^{2/3}$.
23. $(64p^3q^{-6})^{-2/3}$.
24. $(-8m^{-9}n^0)^{-2/3}$.
25. $\left(\dfrac{125a^{-3}b^6c^9}{216x^3y^{-6}z^{-9}}\right)^{2/3}$.
26. $\left(\dfrac{8^{-3}a^{3/2}b^{-3/2}}{343c^6}\right)^{-2/3}$.
27. $\left(\dfrac{256x^{64}}{81y^8}\right)^{-3/4}$.
28. $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-2}}\right)^{2/3}$.
29. $\dfrac{2^{-4} - 3^{-3}}{4^{-2}}$.
30. $\dfrac{2}{3} \cdot 8^{2/3} - \dfrac{2}{3} \cdot 8^{-2/3}$.
31. $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{(x^{-1} - y^{-1})^2}$
32. $\dfrac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1}b^{-2} - a^{-2}b^{-1}}$.
33. $(3x^{3/2} - 4x^{1/2} + 5x^{-1/2})(2x^{3/2} - 3x^{1/2})$.
34. $(4x^{7/3}y^{-1/3} + 7x^{4/3}y^{2/3} - 8x^{1/3}y^{5/3})(6x^{2/3}y^{1/3} - 5x^{-1/3}y^{4/3})$.
35. $(3x^3 - x^2 - 18x + 16) \div (x^{1/2} - 2x^{-1/2})$.
36. $(14x^{5/2} - 25x^{3/2} + 9x^{-1/2}) \div (2x^{1/2} - 3x^{-1/2})$.
37. $(5x^{5/3} - 2x^{2/3} - x^{-1/3})(x^{1/3} + 4x^{-2/3})$.
38. $(6x^2 - 19x - 15 + 28x^{-1}) \div (2x^{1/2} - 7x^{-1/2})$.

Cualquier número puede escribirse como el producto de un número que tiene un solo digital, que no sea cero, a la izquierda del punto decimal y una potencia positiva o negativa de 10. Un número escrito de esta manera se llama *notación científica*. Escriba cada uno de los números siguientes en notación científica:

39. (a) 14,700,000; (b) 0.0000328.

SOLUCIÓN. (a) $14{,}700{,}000 = 1.47 \times 10{,}000{,}000 = 1.47 \times 10^7$;
(b) $0.0000328 = 3.28 \div 100{,}000 = 3.28 \times 10^{-5}$.

Notar que la potencia de 10 es el número de lugares que tendrá que moverse el punto decimal, desde una posición inmediatamente detrás del primer digital no cero, hasta su posición actual. Es "más" si lo movemos a la derecha, "menos" si lo movemos hacia la izquierda.

40. 36,000,000.
41. 0.00000017.
42. El número de segundos en un año.
43. 0.000058 (largo de onda de la luz amarilla, en centímetros).
44. La velocidad de la luz es de 186,000 millas por segundo. Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año. Dar con las tres cifras significantes (ver núm. 14.7) el número de milla hasta la Estrella Polar, distante de 1160 años-luz, expresando el resultado con anotación científica.
45. La rueda de un automóvil tiene 2.5 pies de diámetro. Dar, con cuatro cifras significantes, el número de revoluciones que da en un viaje de 5000 millas. Dar el resultado con anotación científica.

46. 1.2×10^{-8} (mayor acercamiento de átomos en una molécula de hidrógeno, en centímetros).
47. 2.15×10^{-8} (mayor acercamiento de átomos en una molécula de iodina, en centímetros).

Resolver las operaciones siguientes y dar los resultados con anotación científica. Se sugiere escribir el número con anotación científica antes de resolver las operaciones.

48. $650{,}000{,}000 \times 12{,}000{,}000$.
49. $0.00000082 \times 0.000011$.
50. $38.000{,}000 \times 0.00000061$.
51. $750{,}000 \div 0.0000015$.
52. $0.000072 \div 240{,}000{,}000$.
53. Una molécula fibrinógena es una molécula en forma de varita de 7×10^{-6} centímetros de largo y 3.5×10^{-7} centímetros de diámetro. Dar el volumen de esa molécula (una combinación de estas moléculas proteínicas en la sangre, forma coágulos que detienen las hemorragias).

5.7. Números racionales e irracionales.

Un *número racional* es un número que puede expresarse como el cociente de dos integrantes. Por ejemplo, los números 3, —4, $\frac{2}{3}$, 0.3, 5.23 son números racionales, puesto que pueden escribirse, respectivamente, como las proporciones siguientes de los integrantes:

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{-4}{1}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{10} \quad \frac{523}{100}.$$

Un *número irracional* es un número real que no es racional. Los números $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, π son números irracionales.* No pueden expresarse, salvo en forma aproximada, como proporciones de dos integrantes.

Un número es la n^a *potencia perfecta* cuando es la n^a potencia de un número racional. Una segunda potencia perfecta se llama un *cuadrado perfecto*, una tercera potencia perfecta se llama un *cubo perfecto*.

Cuando un número a no es la n^a potencia de un número racional, y que $\sqrt[n]{a}$ es real, entonces $\sqrt[n]{a}$ es irracional * y se llama un (sordo) del orden n. Un (sordo) del segundo orden se llama (sordo) cuadrático, un (sordo) del tercer orden se llama (sordo) cúbico. Así, $\sqrt{3}$ es un (sordo) cuadrático, $\sqrt[3]{4}$ es un (sordo) cúbico. Aunque $\sqrt{25}$ se escriba con un signo radical, no es un (sordo) puesto que $\sqrt{25} = 5$.

* Esto puede comprobarse, pero la prueba no se facilita en este libro.

5.8. Leyes de radicales.

Las reglas siguientes son las reglas fundamentales de radicales:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \tag{2}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{3}$$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}. \tag{4}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \tag{5}$$

Estas fórmulas siguen la definición de una n^a raíz y las leyes de los exponentes. Algunas de ellas no pueden mantenerse sin las restricciones indicadas en la nota del núm. 5.3. Por ejemplo, (2) no subsiste cuando a es negativo y n es par.

5.9. Para eliminar factores de los radicales o introducirlos en los mismos.

Un factor que es una potencia perfecta puede quitarse del radicando tal como se nota en los ejemplos siguientes:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\sqrt{16x^3} = \sqrt{16x^2 \cdot x} = \sqrt{4^2x^2}\sqrt{x} = 4x\sqrt{x},$$

$$\sqrt{75a^2b^3} = \sqrt{25a^2b^2 \cdot 3b} = \sqrt{5^2a^2b^2}\sqrt{3b}$$

$$= 5ab\sqrt{3b},$$

$$\sqrt[3]{54x^4y^5z^6} = \sqrt[3]{27x^3y^3z^6 \cdot 2xy^2} = \sqrt[3]{3^3x^3y^3z^6}\ \sqrt[3]{2xy^2}$$

$$= 3xyz^2\sqrt[3]{2xy^2},$$

$$\sqrt{2a^2 + 4ab + 2b^2} = \sqrt{2(a^2 + 2ab + b^2)}$$

$$= \sqrt{2(a+b)^2} = (a+b)\sqrt{2},$$

de acuerdo con la nota del núm. 5.3. (ver, sin embargo, núm. 5.1.)

A la inversa, se puede introducir un factor en el radicando, así:

$$5a\sqrt{bc} = \sqrt{25a^2}\sqrt{bc} = \sqrt{25a^2bc}.$$

5.10. Para reducir el índice de un radical.

Los ejemplos siguientes muestran cómo se puede reducir, a veces, el índice de un radical:

$$\sqrt[4]{49a^2} = \sqrt[4]{(7a)^2} = (7a)^{2/4} = (7a)^{1/2} = \sqrt{7a},$$

$$\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = 5^{2/6} = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}.$$

Una ventaja de los exponentes fraccionales es evidente en estas reducciones.

EJERCICIOS V. C

Quitar todas las potencias perfectas de los radicandos:

1. $\sqrt{144a}$.
2. $\sqrt{98b^3}$.
3. $\sqrt{242x^3y^6z}$.
4. $\sqrt[3]{54x^5y^4}$.
5. $\sqrt{9a^9}$.
6. $\sqrt[4]{16a^{16}}$.
7. $\sqrt[3]{64x^5y^6z^7}$.
8. $\sqrt[3]{-250x^{20}}$.
9. $\sqrt{0.09u^9}$.
10. $\sqrt[4]{0.016p^{16}}$.
11. $\sqrt[3]{-24x^{-24}}$.
12. $\sqrt{24x^{-24}}$.
13. $\sqrt{4a^2 - 8b^2}$.
14. $\sqrt[3]{8a^4b^3 - 64a^3b^4}$.

Introducir todos los coeficientes debajo de los signos radicales:

15. $4\sqrt{ab}$.
16. $5ab^2\sqrt{2ab}$.
17. $\dfrac{5ab^2}{c^3}\sqrt{2abc}$.
18. $\dfrac{10y}{3x}\sqrt[3]{\dfrac{x}{2y}}$
19. $(a - b)\sqrt{\dfrac{a + b}{a - b}}$.
20. $(a + 3b)\sqrt{\dfrac{a + b}{a^2 - 9b^2}}$.
21. $x^n\sqrt{x}$.
22. $x^n\sqrt[3]{x}$.
23. $x\sqrt[3]{x^2}$.
24. $x^2\sqrt[3]{x}$.

Reducir los índices de los radicales siguientes:

25. $\sqrt[4]{81x^6}$.
26. $\sqrt[6]{27x^{21}}$.
27. $\sqrt[6]{729a^9}$.
28. $\sqrt[9]{729a^3}$

8

29. $\sqrt[4]{\dfrac{9x^{8}}{625y^{2}}}$

30. $\sqrt[6]{\dfrac{125x^{3}}{343y^{6}}}$.

31. $\sqrt[10]{a^{6}b^{4}c^{2}}$.

32. $\sqrt[12]{a^{6}b^{3}c^{9}}$.

33. $\sqrt[6n]{p^{2n}q^{3n}}$.

34. $\sqrt[6n]{p^{2n}q^{4n}}$.

5.11. Para racionalizar el denominador.

Cuando ocurre un radical en el denominador, el denominador puede ser *racionalizado* (es decir, quedar libre de radicales) como se demuestra en los ejemplos que siguen:

Ejemplo 1.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{o} \quad \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

La ventaja principal que se obtiene al racionalizar el denominador es encontrar el valor numérico de la expresión dada. Así, $\sqrt{3} = 1.7321$, y, en el ejemplo 1, es más fácil evaluar 1.7321/3 que 1/1.7321. No hay ninguna ventaja, sin embargo, al emplear una máquina calculadora o logaritmos.

Ejemplo 2.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^{2}}}{\sqrt[3]{2^{3}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Racionalizamos de la misma manera cuando una fracción ocurre debajo de un signo radical.

Ejemplo 3.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Cuando el denominador es $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$, multiplicamos tanto el numerador como el denominador de la fracción por $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$; cuando el denominador es $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$, multiplicamos por $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$. Esto eliminará los radicales en el denominador, puesto que el producto de la suma y de la diferencia de dos números es igual a la diferencia de sus cuadrados.

Ejemplo 4.

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{3-2}$$

$$= \sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-2$$

EJERCICIOS V. D

Racionalizar los denominadores de las fracciones siguientes o eliminar los denominadores de los signos radicales:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.
2. $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.
3. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$.
4. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{25}}$.
5. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.
6. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.
7. $\sqrt[4]{\dfrac{3}{8}}$.
8. $\sqrt{\dfrac{5a}{3x}}$.
9. $\sqrt[3]{\dfrac{4b}{9y}}$.
10. $\dfrac{9}{\sqrt[3]{81a^2}}$.
11. $\dfrac{50}{\sqrt[3]{125a^2}}$.
12. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{-16a}}$.
13. $\dfrac{12}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.
14. $\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}$.
15. $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.
16. $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}}$.
17. $\dfrac{a}{\sqrt{b}+c}$.
18. $\dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}-2}$.
19. $\dfrac{6+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}$.
20. $\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}$.
21. $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{13}}{7\sqrt{5}+3\sqrt{13}}$.
22. $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{a-d\sqrt{c}}$.
23. $\dfrac{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}{c\sqrt{x}+d\sqrt{y}}$.
24. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.
25. $\dfrac{1}{3+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.
26. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-5\sqrt{7}}$.

Simplificar:

27. $$\frac{2x\sqrt{x^2+3}-\dfrac{x(x^2+2)}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}.$$ 28. $$\frac{\dfrac{3x(5x+4)}{\sqrt{3x^2+7}}-5\sqrt{3x^2+7}}{(5x+4)^2}$$

29. Mostrar que cualquiera de las expresiones

$$1+x^{1/3},\ 1-x^{1/3}+x^{2/3}$$

se racionaliza cuando se multiplica por la otra, lo mismo para

$$1-x^{1/3},\ 1+x^{1/3}+x^{2/3}.$$

Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones:

30. $\dfrac{1}{x^{1/3}+y^{1/3}}$. 31. $\dfrac{1+a}{1+a^{2/3}+a^{4/3}}$

32. $\dfrac{149}{3\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{5}}$ 33. $\dfrac{1}{a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$

Racionalizar los numeradores de las siguientes fracciones:

34. $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ 35. $\dfrac{(x+h)^{1/3}-x^{1/3}}{h}$.

Dar los valores decimales de las siguientes expresiones, corregir hasta milésimos, racionalizando primero los denominadores:

36. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. 37. $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. 38. $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$.

39. $\dfrac{\sqrt{17}-\sqrt{3}}{\sqrt{17}-3}$. 40. $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$. 41. $\dfrac{2\sqrt{11}-3\sqrt{7}}{5\sqrt{11}-2\sqrt{7}}$.

5.12. Reducción de expresiones radicales a su forma más sencilla.

Una expresión que contiene radicales se llama estar en su *forma más sencilla* cuando

(i) *no se puede quitar ningún factor del radicando,*
(ii) *no puede reducirse ningún índice,*
(iii) *no hay fracciones debajo de un signo radical,*
(iv) *no hay radicales en un denominador.*

El radical $\sqrt{8}$ viola (i). Puede ser reducido a su forma más simple por el método del núm. 5.9.

El radical $\sqrt[4]{25}$ viola (ii). Puede reducirse a su forma más simple por el método del núm. 5.10.

Las expresiones

$$\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

violan (iv). Pueden reducirse a su forma más simple racionalizando los denominadores (ver núm. 5.11, ejemplos 1 y 4 respectivamente).

En muchos casos, la llamada forma más sencilla de una expresión radical es la forma más fácil para evaluar numéricamente. Sin embargo, esto no es siempre verdad.

EJERCICIOS V. E

Reducir a su forma más sencilla:

1. $\sqrt{50p^2q^3}$.
2. $\sqrt[3]{54p^3q^5}$.
3. $\sqrt[3]{40a^4b^5c^6}$.
4. $\sqrt[4]{289x^8y^4}$.
5. $\sqrt[4]{121m^2n^6}$.
6. $\sqrt[4]{208x^{12}y^{16}}$.
7. $\sqrt[6]{343a^3b^3}$.
8. $\sqrt[6]{361a^2b^2}$.
9. $\sqrt[6]{729a^2b^3}$.
10. $\sqrt{\dfrac{3x}{2y}}$.
11. $\sqrt[3]{\dfrac{-a^4}{5b^2}}$.
12. $\dfrac{4y}{\sqrt{10x^3y}}$.
13. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9a^2b}}$.
14. $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.
15. $\dfrac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}$.
16. $(36)^{-1/3}$.
17. $(54x)^{-2/3}$.
18. $(8x^{-7})^{-2/3}$.
19. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3/5}$.
20. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3/4}$.
21. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2/3}$.
22. $\dfrac{2a-b}{2a^{1/2}-(2b)^{1/2}}$.
23. $\dfrac{1}{a^{-1/2}+b^{-1/2}}$.
24. $\dfrac{a^{-1/2}+b^{-1/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}}$.
25. $\dfrac{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.
26. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$.
27. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{5}}}{\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}}$.
28. $\sqrt[n]{a^{n+1}b^{n+2}}$.
29. $\sqrt[n]{a^{2n}b^{3n}}$.
30. $\sqrt[2n]{a^{2n}b^{3n}}$.
31. $\sqrt[n]{a^{2n+2}b^{3n+2}}$.
32. $\sqrt[n]{n^{2n}}$.
33. $\sqrt[n]{n^{n}}$.

5.13. Adición y sustracción de radicales.

Los radicales pueden combinarse en un término único al hacer una adición o una sustracción, siempre y cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplos.

$$3\sqrt{2} + \sqrt{2} = (3 + 1)\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$
$$5\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = (5 - 2)\sqrt{a} = 3\sqrt{a},$$
$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} - c\sqrt{x} = (a + b - c)\sqrt{x},$$
$$7\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5} = (7 + 1 - 2)\sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{5}.$$

No podemos combinar en un solo término radicales como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, o $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$, o $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{7}$.

Sin embargo, los radicales pueden a veces reducirse a formas que pueden sumarse.

Ejemplo.

$$\sqrt{8} + 3\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \left(2 + 3 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

EJERCICIOS V. F

Simplificar y combinar los términos iguales:

1. $73\sqrt{17} - 84\sqrt{17} + 2\sqrt{17}.$
2. $18\sqrt{a} + 24\sqrt{a} - 7\sqrt{a}.$
3. $27\sqrt{3} - 3\sqrt{27}.$
4. $5\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x} - 9\sqrt[3]{x}.$
5. $\sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{12}.$
6. $\sqrt[3]{3000} - \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}.$
7. $\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{27}.$
8. $\sqrt{\frac{2a}{7b}} - \sqrt{\frac{7a}{2b}}.$
9. $6\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[6]{125} + 4\sqrt[4]{25} - 2\sqrt{125}.$
10. $\sqrt{64} - \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{64} + \sqrt[5]{64} - \sqrt[6]{64}.$
11. $(0.6)^{0.8} + \sqrt[3]{0.216} + \sqrt[4]{164025}.$
12. $\sqrt[4]{\frac{2}{5}} - \frac{2}{\sqrt{10}} - \sqrt[8]{\frac{2}{5}} + \frac{2}{\sqrt[4]{20}}.$

13. $\sqrt{50} + \sqrt{0.5} + \dfrac{1}{\sqrt{0.5}} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{2500}.$

14. $\sqrt{729} + \sqrt[3]{729} + \sqrt[4]{729} + \sqrt[5]{729} + \sqrt[6]{729}.$

5.14. Multiplicación de radicales.

Los radicales que tiene el mismo índice pueden multiplicarse por la fórmula (4) del núm. 5.8.

Ejemplo 1.

$$\sqrt{7}\sqrt{6} = \sqrt{42}.$$

Ejemplo 2.

$$2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{7} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = 10\sqrt{21}.$$

Notar que este método no puede emplearse cuando los radicandos son negativos.

Los radicales que tienen índices diferentes pero el mismo radicando pueden multiplicarse empleando exponentes fraccionales.

Ejemplo 3.

$$\sqrt{5}\sqrt[4]{5} = 5^{1/2} \cdot 5^{1/4} = 5^{1/2+1/4} = 5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}.$$

Los radicales que tienen índices diferentes y radicandos diferentes pueden multiplicarse reduciéndolos primero a radicales que tienen el mismo índice.

Ejemplo 4.

$$\sqrt{5}\sqrt[3]{4} = 5^{1/2} \cdot 4^{1/3} = 5^{3/6} \cdot 4^{2/6} = \sqrt[6]{5^3}\sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 4^2} = \sqrt[6]{2000}.$$

EJERCICIOS V. G

Resolver las operaciones indicadas y simplificar los resultados:

1. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{19}.$
2. $\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}.$
3. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4}.$
4. $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{6}.$
5. $\sqrt{3a} \cdot \sqrt[3]{3a}.$
6. $\sqrt[3]{2x^2y} \cdot \sqrt{2x^2y}.$
7. $5\sqrt{7x} \cdot 7\sqrt{5x}.$
8. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{9x^2} \cdot \sqrt[3]{36x^2}.$
9. $\sqrt[3]{8a^2} \cdot \sqrt[3]{4a^2}.$
10. $3\sqrt{3a} \cdot 3a\sqrt[3]{3a}.$
11. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}.$
12. $(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9})^3.$

13. $2\sqrt[3]{4a^2b}\cdot 4\sqrt[3]{2a^2b^2}$.

14. $x\sqrt{yz}\cdot y\sqrt{xz}\cdot z\sqrt{xy}$.

15. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{5}$.

16. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})$.

17. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4})$.

18. $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4})^2$.

19. $(\tfrac{2}{3})^{3/2}(\tfrac{1}{2})^{4/3}$.

20. $(\tfrac{2}{3})^{-2/3}(\tfrac{3}{4})^{-3/4}$.

21. $(3\sqrt{6}-2\sqrt[3]{4})(4\sqrt{6}+3\sqrt[3]{4})$.

22. $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6})^2$.

23. $\left(x-\dfrac{3+5\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-5\sqrt{2}}{2}\right)$.

24. $\left(x-\dfrac{7+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{7-\sqrt{3}}{2}\right)$.

25. $\left(x-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}\right)$.

26. $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

27. Dar el valor de x^2-6x+2 cuando $x=3+\sqrt{7}$.

28. Dar el valor de $4x^2-20x+19$ cuando $x=\dfrac{5-\sqrt{6}}{2}$.

29. Dar el valor de $x^3+12x+12$ cuando $x=\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}$.

30. Dar el valor de ax^2+bx+c cuando $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; cuando $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

5.15. División de radicales.

La división de radicales y de expresiones radicales se logra generalmente más fácilmente poniendo el problema en su forma fraccional y racionalizando el denominador (cuando sea necesario).

Ejemplo 1.

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{14}{7}}=\sqrt{2}.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}.$$

Ejemplo 3.

$$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) \div (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

$$= \frac{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 \cdot 5 + 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10} + 3 \cdot 2}{5 - 2}$$

$$= \frac{16 + 5\sqrt{10}}{3}.$$

Cuando los índices son diferentes pero los radicando son iguales, los exponentes fraccionales pueden emplearse ventajosamente.

Ejemplo 4.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5^{1/2}}{5^{1/3}} = 5^{1/2-1/3} = 5^{1/6} = \sqrt[6]{5}.$$

El ejemplo que sigue ilustra el caso de un dividendo y de un divisor que tienen ambos índices diferentes y radicandos diferentes.

Ejemplo 5.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{6^{1/2}}{5^{1/3}} = \frac{6^{3/6}}{5^{2/6}} = \sqrt[6]{\frac{6^3}{5^2}} = \sqrt[6]{\frac{6^3 \cdot 5^4}{5^2 \cdot 5^4}} = \frac{\sqrt[6]{135000}}{5}.$$

EJERCICIOS V. H

Resolver las operaciones indicadas y simplificar los resultados:

1. $\sqrt{91} \div \sqrt{13}$.
2. $\sqrt{92} \div \sqrt{23}$.
3. $\sqrt[3]{198} \div \sqrt[3]{33}$.
4. $\sqrt{84} \div \sqrt{7}$.
5. $\sqrt[3]{18} \div \sqrt[3]{4}$.
6. $\sqrt{23} \div \sqrt[3]{23}$.
7. $\sqrt[3]{17} \div \sqrt{17}$.
8. $\sqrt{11} \div \sqrt[3]{11}$.
9. $\sqrt[3]{7} \div \sqrt[4]{7}$.
10. $\sqrt{15} \div \sqrt[3]{5}$.
11. $\sqrt[3]{6} \div \sqrt{2}$.
12. $\sqrt[3]{12} \div \sqrt[3]{2}$.
13. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{3}{4}}$.
14. $\sqrt{\frac{a}{b}} \div \sqrt{\frac{c}{a}}$.
15. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \div \sqrt{\frac{c}{b}}$.
16. $10x^2y\sqrt[3]{4x^2y} \div (5x^2y\sqrt[3]{2x^2y})$.
17. $(\sqrt[3]{4x} - \sqrt[4]{4x}) \div \sqrt{2x}$.
18. $(3 + \sqrt{7}) \div (2 - \sqrt{7})$.
19. $(\sqrt{6} + \sqrt{5}) \div (\sqrt{6} - \sqrt{5})$.

20. $(\sqrt{11} - \sqrt{7}) \div (\sqrt{11} + \sqrt{7})$.

21. $(6\sqrt{2} - \sqrt{3}) \div (\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$.

22. $(a + b\sqrt{x}) \div (c + d\sqrt{x})$.

23. $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \div (c + \sqrt{b})$.

24. $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \div (\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

25. $(a\sqrt{x} + b\sqrt{y}) \div (c\sqrt{x} + b\sqrt{y})$.

26. $(1 + \sqrt[3]{x}) \div (1 - \sqrt[3]{x})$.

27. $(1 + \sqrt[3]{x}) \div (1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})$.

5.16. Números imaginarios y complejos.*

Un número negativo no tiene raíz cuadrada real, puesto que ningún número positivo o negativo, cuando se eleva al cuadrado puede dar un número negativo. Por lo tanto, a fin de resolver ciertas ecuaciones, $x^2 + 4 = 0$, por ejemplo, es necesario introducir una nueva clase de número que se llama *número imaginario*.

La *unidad imaginaria* es el número i que tiene la propiedad

$$i^2 = -1.$$

Se supone que este nuevo número obedece a todas las leyes de adición y de multiplicación previstas para los números reales.

De acuerdo con la definición de i, parece que podemos decir

$$\sqrt{-1} = i, \qquad \sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i,$$
$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = i\sqrt{3}.$$

Un número bajo la forma $a + bi$ en el cual a y b son números reales es un *número complejo*. El número a se llama el *componente real* o la *parte real*, del número complejo; el número b se llama el *componente imaginario* o la *parte imaginaria*.

Los dos números complejos $a + bi$ y $x + di$ son iguales solamente cuando $a = c$ y $b = d$, es decir, siempre y cuando sus componentes reales son iguales y sus componentes imaginarios iguales.

Cuando $b \neq 0$, el número complejo se llama un *número imaginario*. Así, $2 - 3i$, $5i$ y $i\sqrt{3}$ son números imaginarios. Si $b \neq 0$ y $a = 0$,

* Para un estudio más completo de este tema ver el Capítulo XII.

el número complejo se reduce a la forma bi, que se llama un *número imaginario puro*. Cuando ni a ni b son cero, $a + bi$ puede llamarse un *número imaginario mixto*.

Cuando $b = 0$, el número complejo se reduce al número real a por ejemplo, 7, $-\sqrt{5}$, 0.

De esta manera, el sistema de números complejos incluye los números reales y los números imaginarios puros como casos especiales.

Los números $a + bi$ y $a - bi$ se llaman *números complejos conjugados*, cualquiera de los dos siendo el conjugado del otro.

5.17. Operaciones con números complejos.

Añadimos y sustraemos números complejos sumando y sustrayendo sus partes reales y sus partes imaginarias en forma separada.

Ejemplo 1.

$$(2 + 5i) + (6 - 4i) = (2 + 6) + (5 - 4)i = 8 + i,$$
$$(2 + 5i) - (6 - 4i) = (2 - 6) + (5 + 4)i = -4 + 9i.$$

Los números imaginarios puros se multiplican como lo hacen los números literales y el producto se simplifica al emplear la relación $i^2 = -1$. Un número como $\sqrt{-5}$ debe siempre reducirse a la forma $i\sqrt{5}$ antes de la multiplicación, de otro modo se obtendrán resultados incorrectos. Así, mientras $\sqrt{-5}\sqrt{-6} = i\sqrt{5} \cdot i\sqrt{6} = i^2\sqrt{30} = -\sqrt{30}$, lo que sigue es incorrecto: $\sqrt{-5}\sqrt{-6} = \sqrt{-5(-6)} = \sqrt{30}$.

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned}(3 + 5i)(6 - 7i) &= 18 + 9i - 35i^2\\ &= 18 + 9i + 35 = 53 + 9i.\end{aligned}$$

Para dividir un número complejo por otro, escribir el cociente como fracción y después multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned}(3 + 5i) \div (6 - 7i) &= \frac{3 + 5i}{6 - 7i}\\ &= \frac{(3 + 5i)(6 + 7i)}{(6 - 7i)(6 + 7i)} = \frac{18 + 51i + 35i^2}{36 - 49i^2}\\ &= \frac{18 + 51i - 35}{36 + 49} = \frac{-17 + 51i}{85}.\end{aligned}$$

EJERCICIOS V. I

Reducir a la forma $a + bi$:

1. $5 + \sqrt{-36}$. 2. $8 - \sqrt{-289}$. 3. $11 + \sqrt{-121}$.

4. $3 + \sqrt{-3}$. 5. $7 - \sqrt{-8}$. 6. $18 + \sqrt{-98}$.

7. $x + \sqrt{-y}$. 8. $p + \sqrt{-q^2}$. 9. $a - \sqrt{-b^2c}$.

10. $\frac{2}{5} + \sqrt{-\frac{4}{9}}$. 11. $8 - \sqrt{-\frac{2}{9}}$. 12. $\frac{3}{7} - \sqrt{-\frac{2}{3}}$.

13. $\sqrt{-8} + \sqrt[3]{-8}$. 14. $\sqrt{-4} + \sqrt[3]{4}$. 15. $\sqrt{-2} + \sqrt[3]{-5}$.

Dar las sumas y diferencias de los números siguientes:

16. $16 + 5i$, $18 - 3i$. 17. $71 - 11i$, $10 - 24i$.

18. $5 + \sqrt{-16}$, $3 + \sqrt{-25}$. 19. $6 - \sqrt{-3}$, $3 - \sqrt{-6}$.

20. $\sqrt{2} + \sqrt{-3}$, $\sqrt{3} + \sqrt{-12}$. 21. $13 - \sqrt{-17}$, $14 + \sqrt{-18}$.

22. $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) + (5\sqrt{6} + 6\sqrt{5})i$,
$(7\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) + (2\sqrt{6} - 3\sqrt{5})i$.

Dar los productos y potencias siguientes:

23. $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$. 24. $\sqrt{-14}\sqrt{-21}$. 25. $\sqrt{-2}\sqrt{-6}\sqrt{-15}$.

26. $\sqrt{-13}\sqrt{13}$. 27. $(\sqrt{-11})^2$. 28. $(-\sqrt{-3})^2$.

29. $(\sqrt{-7})^4$. 30. $(\sqrt{-5})^3\sqrt{-15}$. 31. $(2 + 3i)(7 + 6i)$.

32. $(4 - 5i)(8 - 9i)$. 33. $(13 - 2i)(2 - 9i)$.

34. $(4 - i\sqrt{5})(7 - 2i\sqrt{5})$. 35. $(4 - \sqrt{-3})(5 + \sqrt{-3})$.

36. $(9 - 2\sqrt{-10})(11 - 6\sqrt{-15})$. 37. $(7 - 3i)^2$.

38. $(2 - i\sqrt{3})^2$. 39. $(2 + 3i)^3$. 40. $(1 + i)^4$.

41. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)^3$. 42. $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)^3$.

Dar los cocientes siguientes:

43. $\sqrt{-100} \div \sqrt{-25}$. 44. $\sqrt{-30} \div \sqrt{-6}$.

45. $\sqrt{-15} \div \sqrt{15}$. 46. $\sqrt{17} \div \sqrt{-17}$.

47. $(6 + 5i) \div (2 + 7i)$.

48. $(8 - 3i) \div (6 + 11i)$.

49. $(3 - 8i) \div (10 - 9i)$.

50. $(9 - i) \div (13 + 2i)$.

51. $(5 - i\sqrt{3}) \div (2 + i\sqrt{7})$.

52. $(4\sqrt{3} + 3\sqrt{7} \cdot i) \div (7\sqrt{3} + 4\sqrt{7} \cdot i)$.

53. $(\sqrt{6} + i\sqrt{14}) \div (\sqrt{6} + i\sqrt{21})$.

54. $(4 + 3i\sqrt{15}) \div (8 + 7i\sqrt{10})$.

55. $2 \div (9 + 7i)$.

56. $5i \div (6 - 11i)$.

57. Encuéntrese el valor de $x^2 - 4x + 13$ como $x = 2 + 3i$.

58. Encuéntrese el valor de $x^2 - 10x + 32$ como $x = 5 - i\sqrt{7}$.

59. Encuéntrese el valor de $2x^2 - 18x + 43$ como $x \, \dfrac{9 + i\sqrt{5}}{2}$.

60. Encuéntrese el valor de $x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + 5$ como $x = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$.

CAPITULO VI

Ecuaciones cuadráticas

6.1. Ecuaciones cuadráticas.

Una ecuación cuadrática (con una incógnita) es una ecuación en la cual la más alta potencia de la incógnita que ocurre es 2. El término de primer grado y el término constante pueden o no estar presentes. Las ecuaciones siguientes son cuadráticas:

$3x^2 - 2x + 4 = 0, \quad x^2 + 5 = 0, \quad 2x^2 + 3x = 0, \quad 2x^2 = 0.$

6.2. Solución por factorización.

Se puede frecuentemente resolver una ecuación cuadrática por medio de la factorización.

Ejemplo 1.

Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$.

SOLUCIÓN. En forma factorizada, la ecuación es

$$(x-2)(x-3) = 0.$$

El producto es cero siempre y cuando uno de los factores sea cero. Por lo tanto, se pueden encontrar todas las raíces reduciendo cada factor por turno a cero. Así,

$$x - 2 = 0, \qquad x = 2.$$
$$x - 3 = 0, \qquad x = 3.$$

REVISIÓN. $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0.$
$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0.$

Ejemplo 2.

Resolver $3x^2 + 2x = 0.$

SOLUCIÓN. $x(3x + 2) = 0.$

$$x = 0.$$

$$3x + 2 = 0, \qquad x = -\frac{2}{3}$$

Las raíces son 0 y $-\frac{3}{5}$ y es fácil verificar que estos números satisfacen la ecuación.

6.3. Cuando falta el término de primer grado.

Cuando falta el término de primer grado se puede resolver fácilmente la ecuación, como en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.

Resolver $4x^2 - 3 = 0.$

SOLUCIÓN. $4x^2 = 3.$

$$x^2 = \frac{3}{4}.$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\text{o} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

(El signo $\pm$ se interpreta "más o menos", ver núm. 5.3.)

Ejemplo 2.

Resolver $4x^2 + 3 = 0.$

SOLUCIÓN. $4x^2 = -3.$

$$x^2 = -\frac{3}{4}.$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{-3}}{2} = \pm\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

6.4. Completando el cuadrado.

Una ecuación cuadrática puede siempre resolverse completando el cuadrado.

Ejemplo.

Resolver $3x^2 - 2x - 4 = 0.$

SOLUCIÓN.

Transponer el término constante:

$$3x^2 - 2x = 4.$$

Dividir ambos lados por el coeficiente de x^2:

$$x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}.$$

Sustituir en (2):

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación $kx^2 + 3kx - 2x + 4 = k$.

SOLUCIÓN. Volver a arreglar la ecuación bajo la forma de

$$kx^2 + (3k - 2)x + (4 - k) = 0.$$

Entonces $a = k,\ b = 3k - 2,\ c = 4 - k$.

Sustituir en la fórmula (2):

$$x = \frac{-3k + 2 \pm \sqrt{(3k - 2)^2 - 4k(4 - k)}}{2k}$$

$$= \frac{-3k + 2 \pm \sqrt{13k^2 - 28k + 4}}{2k}$$

EJERCICIOS VI. A

1. $x^2 - 12x + 35 = 0$.
2. $x^2 - 3x - 40 = 0$.
3. $x^2 + x - 56 = 0$.
4. $x^2 - 13x + 36 = 0$.
5. $x^2 - 121 = 0$.
6. $x^2 - 121x = 0$.
7. $x^2 + 289 = 0$.
8. $4x^2 + 7 = 0$.
9. $x^2 + 4x + 1 = 0$.
10. $x^2 - 6x - 8 = 0$.
11. $x^2 + 2x - 7 = 0$.
12. $x^2 - 3x - 10 = 0$.
13. $x^2 - 3x + 10 = 0$.
14. $x^2 + x + 1 = 0$.
15. $2x^2 - x - 1 = 0$.
16. $3x^2 - 11x + 10 = 0$.
17. $15x^2 - 2x - 8 = 0$.
18. $12x^2 - 73x + 6 = 0$.
19. $9x^2 + 42x + 49 = 0$.
20. $16x^2 + 88x + 121 = 0$.
21. $x^2 - (r + s)x + rs = 0$.
22. $x^2 + px + q = 0$.
23. $3x^2 + 4x + 5 = 0$.
24. $6x^2 - 10x - 7 = 0$.
25. $4x^2 + 4x + 1 = 0$.
26. $5x^2 - x + 2 = 0$.
27. $2x^2 + 5x + 2 = 0$.
28. $21x^2 - 58x + 21 = 0$.
29. $x^2 - 0.7x + 0.12 = 0$.
30. $x^2 + 0.5x - 0.84 = 0$.
31. $300x^2 - 750x + 625 = 0$.
32. $2x^2 + 3x + 4 = k$.
33. $2x^2 + 3x + 4 = kx$.
34. $2x^2 + 3x + 4 = kx^2$.

35. $x - \frac{16}{x} = 6.$

36. $\frac{x}{a} - \frac{a}{x} = x - a.$

37. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{3}.$

38. $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}.$

39. $\frac{x-2}{2x-3} = \frac{3x-4}{4x-5}.$

40. $\frac{x+4}{x-2} = \frac{5x-4}{3x-8}.$

41. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} = 3.$

42. $\frac{5x}{4x-3} - \frac{3x+4}{x-8} = 6.$

43. El largo de un rectángulo es de 3 pulgadas más grande que su ancho. Su superficie es de 70 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son sus dimensiones?

44. La diagonal de un rectángulo tiene 2 pulgadas de más que su largo y 9 pulgadas de más que su ancho. Dar las dimensiones del rectángulo.

45. Dar dos integrantes pares consecutivos y positivos cuya suma de sus cuadrados es 580.

46. Dar dos integrantes positivos consecutivos cuyo producto es 1332.

47. Dar dos integrantes impares consecutivos y positivos cuyo producto es 783.

48. Un número es 10 más que otro. Su producto es 299. ¿Cuáles son estos números?

49. Las dimensiones exteriores de un marco para retrato son de 24 y 36 pulgadas. La superficie del marco es de tres quintas partes de la superficie del retrato que enmarca. Dar el ancho del marco.

50. Una charola con una base cuadrada y un volumen de 648 pulgadas cúbicas se ha de construir con una lámina cuadrada de estaño cortando 2 pulgadas cuadradas en las esquinas y doblando los lados. ¿Qué tamaño de lámina deberá usarse?

51. Una hoja de cartón rectangular es dos veces más larga que ancha. Se elabora con ella una caja sin tapa que tiene una capacidad de 168 pulgadas cúbicas cortando 3 pulgadas cuadradas en las esquinas y doblando los lados y las extremidades. Dar las dimensiones de la hoja de cartón.

52. Un grupo de pescadores alquiló una lancha por \$ 240. Dos de los hombres tuvieron que renunciar al viaje y, por lo tanto, la participación de cada uno de los demás aumentó en \$ 10.00. ¿Cuántos eran los miembros de la expedición original?

53. Un hombre maneja 156 millas a una velocidad constante. Si hubiera manejado 5 millas por hora más rápidamente hubiera hecho el viaje en 12 minutos menos. ¿A qué velocidad estaba manejando este hombre?

54. Un avión volando hacia el norte a una velocidad de 240 millas por hora pasó por encima de un campo de aviación a las 12 del día. Un segundo avión volando hacia el este a 200 millas por hora pasó sobre

el mismo campo 5 minutos más tarde. ¿A qué hora estuvieron a 250 millas uno de otro?

55. Un abarrotero pagó 360.00 por unas cajas de frutas. Se estropearon 4 cajas y tuvieron que tirarse, pero vendió el resto aumentando el precio en \$ 2.00 por caja y ganando \$ 88.00. ¿Cuántas cajas compró originalmente?
56. Un especulador vendió algunas acciones en \$ 2,880.00. Algunos días más tarde, estas acciones bajaron de valor en \$ 2.00 por acción y las volvió a comprar más 6 acciones nuevas por la misma cantidad. ¿Cuántas acciones vendió?
57. Un tanque puede llenarse en 12 minutos por medio de dos tuberías abiertas simultáneamente. Con la tubería más grande, puede llenarse en 10 minutos menos que con la tubería chica. Dar el tiempo necesario para cada tubería para llenar sola el mencionado tanque.
58. Un muchacho se encuentra en un punto A en un río recto. Puede remar con la corriente a una velocidad que es superior en 2 millas por hora que si corriera. Cuando rema con la corriente hacia un punto B, 4 millas abajo de A y después corre en una dirección perpendicular al río hasta un punto C a tres millas de B, le toma 10 minutos que si corriera directamente desde A hasta C. ¿A qué velocidad puede correr este muchacho?
59. Un jardín de flores circular está rodeado por un camino de 3 pies. La superficie del camino es ⅝ la del jardín. ¿Cuál es el radio del jardín?
60. Una vara que pesó 2 libras por pie puede balancearse en un punto situado a 2 pies de una extremidad añadiendo un peso de 6 libras a esta extremidad. ¿Qué largo tiene la vara?
61. Un mensajero en motocicleta dejó la retaguardia de una tropa motorizada de 7 millas de largo y viajó hacia el frente de la tropa, regresando después a su punto de partida. ¿Qué distancia viajó si la tropa avanzó 24 millas durante este tiempo y tanto la tropa como el motociclista progresaron a una velocidad constante?

En geometría analítica la forma standard para la ecuación de un círculo es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

en la cual h y k son las coordinadas del centro y r es el radio. Las cantidades h y k pueden ser positivas o negativas, pero r está limitado a valores positivos. Una vez completados los cuadrados, reducir cada una de las ecuaciones siguientes de círculos a la forma antes anotada y dar las coordinadas del centro y el radio:

62. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0.$

Solución. $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 3 + 9 + 4,$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Las coordinadas del centro son $(3, -2)$, el radio $= \sqrt{16} = 4$.

63. $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0.$
64. $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 15 = 0.$
65. $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 8 = 0.$
66. $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 1 = 0.$
67. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y - 17 = 0.$

En cálculo integral se desea frecuentemente cambiar una expresión de forma $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, $a > 0$, en la forma $\sqrt{a}\sqrt{(x - h)^2 + k}$ o una expresión de forma $\sqrt{c + bx - ax^2}$ $a > 0$, en la forma $\sqrt{a}\sqrt{k - (x - h)^2}$. Transformar cada una de las expresiones siguientes en una de estas formas apropiadas:

68. $\sqrt{2x^2 + 4x + 10}.$
69. $\sqrt{3x^2 - 18x + 12}.$
70. $\sqrt{2x^2 + 2x + 7}.$
71. $\sqrt{5x^2 + 40x - 10}.$
72. $\sqrt{6x^2 + 36x}.$
73. $\sqrt{7x^2 - 42x + 77}.$
74. $\sqrt{2 - 6x - x^2}.$
75. $\sqrt{6 + 8x - 4x^2}.$
76. $\sqrt{6 - 3x - 3x^2}.$
77. $\sqrt{10x - 2x^2}.$
78. $\sqrt{7 - 3x - 5x^2}.$
79. $\sqrt{-8x - 2x^2}.$

6.6. Ecuaciones en forma cuadrática.

Una ecuación se encuentra en *forma cuadrática* cuando es una cuadrática en alguna función de la incógnita original. Así,

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \text{ es una cuadrática en } x^2,$$

$$2x + 3\sqrt{x} - 5 = 0 \text{ es una cuadrática en } \sqrt{x}.$$

Ejemplo 1.

Resolver $x^4 + x^2 - 20 = 0.$

SOLUCIÓN. Factor:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 5) = 0.$$

Disponer cada factor por separado igual a cero, dando

$$x^2 = 4, \qquad x = \pm 2.$$

$$x^2 = -5, \qquad x = \pm\sqrt{-5} = \pm i\sqrt{5}.$$

Ejemplo 2.

Resolver $$\frac{x^2 - 5}{x^2 + 3} + \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5} = -2.$$

SOLUCIÓN. Sea

$$\frac{x^2-5}{x^2+3}=y.$$

Entonces

$$y+\frac{1}{y}=-2,$$
$$y^2+1=-2y,$$
$$y^2+2y+1=0,$$
$$y=-1,\ \text{o}\ \frac{x^2-5}{x^2+3}=-1.$$
$$x^2=1,$$
$$x=\pm 1.$$

Notar que las dos fracciones en la ecuación son recíprocas y que podríamos muy bien haber representado la segunda por y, en vez de la primera.

EJERCICIOS VI. B

Resolver las ecuaciones siguientes. Si una ecuación involucra radicales o exponentes fraccionales, todas las contestaciones deben comprobarse por sustitución en la ecuación original.

1. $x^4-11x^2+18=0.$
2. $x^4-2x^2-35=0.$
3. $x^4+19x^2+48=0.$
4. $x^6-7x^3-8=0.$
5. $12x^4-31x^2+9=0.$
6. $6x^4-23x^2-225=0.$
7. $x+2\sqrt{x}-15=0.$
8. $x-10\sqrt{x}+21=0.$
9. $x^{2/3}-3x^{1/3}-18=0.$
10. $x^{2/3}+12x^{1/3}+35=0.$
11. $x^{2/3}-2x^{1/3}-6=0.$
12. $x^{2/3}-x^{1/3}+4=0.$
13. $6x^{2/3}+11x^{1/3}-10=0.$
14. $9x^{2/3}-33x^{1/3}+28=0.$
15. $x^{4/3}-13x^{2/3}+36=0.$
16. $x^{4/3}-5x^{2/3}-6=0.$
17. $6x^{1/4}-x^{1/2}-9=0.$
18. $x^{1/3}+x^{1/6}-6=0.$
19. $\left(\frac{2x}{x-5}\right)^2+\frac{6x}{x-5}-18=0.$
20. $\frac{x^2+2}{x^2-6}+\frac{x-6}{x^2+2}+\frac{13}{6}=0.$
21. $\frac{x^2+2}{x^2-2}+\frac{x^2-2}{x^2+2}-\frac{170}{77}=0.$
22. $\sqrt{\frac{x+10}{x-6}}+\sqrt{\frac{x-6}{x+10}}-\frac{34}{15}=0.$
23. $\sqrt{\frac{x+7}{x-5}}-\sqrt{\frac{x-5}{x+7}}-\frac{3}{2}=0.$

24. $(x^2 + x - 2)^2 - 5(x^2 + x - 2) - 50 = 0.$
25. $(x^2 - 2x + 3)^2 - 5(x^2 - 2x + 3) + 6 = 0.$

6.7. Ecuaciones involucrando radicales.

Una ecuación que involucre radicales puede resolverse a veces por el método indicado en la sección anterior. Otro método de resolución está ilustrado por los ejemplos que siguen.

Ejemplo 1.

Resolver $$x + \sqrt{x} - 6 = 0.$$

SOLUCIÓN.

Transponer $\sqrt{x}$: $$x - 6 = -\sqrt{x}.$$

Cuadrado:
$$x^2 - 12x + 36 = x,$$
$$x^2 - 13x + 36 = 0,$$
$$(x - 4)(x - 9) = 0,$$
$$x = 4,\ 9.$$

El valor 4 checa, puesto que

$$4 + \sqrt{4} - 6 = 4 + 2 - 6 = 0.$$

El valor 9 no checa, sin embargo, puesto que

$$9 + \sqrt{9} - 6 = 9 + 3 - 6 \neq 0.$$

Esto no sucede porque hemos hecho algún error, sino porque al dar el cuadrado de ambos lados de la ecuación hemos introducido una raíz extraña (ver núm. 4.8). El valor 9 debe desecharse como raíz posible, puesto que no satisface la ecuación original. Así la única raíz de la ecuación es $x = 4$.

Al tratar ecuaciones que involucran radicales, todas las soluciones deben comprobarse, puesto que algunas pueden ser extrañas. Al respecto, debe recordarse que $\sqrt{x}$, cuando x es positivo, indica solamente la raíz cuadrada positiva de x.

El ejemplo 1 puede resolverse usando el método de la sección precedente, como sigue:

$$x + \sqrt{x} - 6 = 0,$$
$$(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2) = 0.$$

Puesto que $\sqrt{x}$ no puede ser negativo, $\sqrt{x} + 3$ no puede ser cero; de allí

$$\sqrt{x} - 2 = 0, \qquad \sqrt{x} = 2, \qquad x = 4.$$

Este método es preferible en este caso.

Ejemplo 2.

Resolver $\sqrt{3x + 7} + \sqrt{x + 1} - 2 = 0.$

Solución. Transponer, guardando solamente un radical en un lado de la ecuación. (Cuando hay alguna diferencia en la complejidad de los radicales *aislar siempre el más complicado.)*

$$\sqrt{3x + 7} = 2 - \sqrt{x + 1}.$$

Cuadrado: $3x + 7 = 4 - 4\sqrt{x + 1} + x + 1.$

Juntar los términos, dejando el radical sólo en un lado:

$$4\sqrt{x + 1} = -2x - 2.$$

Dividir por 2: $2\sqrt{x + 1} = -x - 1.$

Otra vez cuadrado: $4x + 4 = x^2 + 2x + 1,$

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0,$$

$$x = 3, -1$$

El valor 3 no satisface la ecuación y debe desecharse como raíz.

Ejemplo 3.

Resolver $\sqrt{x + 1} + 3 = 0.$

Discusión. Podríamos proceder como antes, obteniendo valores para x. Esto es inútil, sin embargo, puesto que ambos términos son positivos, exactamente, la raíz positiva de $x + 1$ y el número positivo 3, y es imposible que la suma de ellos sea cero.

Ejemplo 4.

Resolver $6x^2 + 10x + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = -1.$

Solución reduciendo a la forma cuadrática. Añadir 2 en ambos lados:

$$6x^2 + 10x + 2 + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1,$$

$$2(3x^2 + 5x + 1) + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1.$$

Que $\sqrt{3x^2 + 5x + 1} = y$:

$$2y^2 + y - 1 = 0,$$
$$(2y - 1)(y + 1) = 0,$$
$$y = \frac{1}{2}, -1.$$
$$\sqrt{3x^2 + 5x + 1} = \frac{1}{2} \text{ o } -1.$$

Puesto que un radical positivo no puede ser igual a -1, podemos considerar solamente la ecuación en la cual el lado derecho es ½. Al hacer el cuadrado de esto, obtenemos

$$3x^2 + 5x + 1 = \frac{1}{4},$$
$$12x^2 + 20x + 3 = 0,$$
$$x = -\frac{1}{6}, -\frac{3}{2}.$$

Ambos valores satisfacen la ecuación original.

EJERCICIOS VI. C

Resolver:

1. $\sqrt{x - 2} - 3 = 0.$
2. $\sqrt{5x + 4} - 13 - 0.$
3. $\sqrt{4x + 15} - 2x = 0.$
4. $\sqrt{5x - 4} + 2x - 12 = 0.$
5. $\sqrt{5 - x} = 2x.$
6. $\sqrt{x - 3} + 2\sqrt{x - 5} = 0.$
7. $\sqrt{2x - 9} + \sqrt{x} - 6 = 0.$
8. $\sqrt{2x + 4} - \sqrt{x + 3} - 1 = 0.$
9. $\sqrt{2x} - \sqrt{x + 1} - 1 = 0.$
10. $\sqrt{x + 2\sqrt{2x + 3}} - 3 = 0.$
11. $\sqrt{x + \sqrt{x + 2}} - \sqrt{x} - 1 = 1.$
12. $\sqrt{x^2 + 4x + 6} + \sqrt{x^2 - 4x + 6} = 5.$
13. $\sqrt{2x - \sqrt{x - 4}} - \sqrt{x + 4} = 0.$
14. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3} - \sqrt{x - 6} = 0.$
15. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 3} - \sqrt{2x + 1} = 0.$
16. $\sqrt{x^2 + 2x - 2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} - x = 0.$

17. $2\sqrt[3]{37 - x^2} + 3\sqrt{x} = 0.$
18. Un lado de un rectángulo tiene 12 pulgadas. Al reducir el otro lado en 4 pulgadas, la diagonal se reducirá en 2 pulgadas. Dar el largo del otro lado.
19. Una escalera tiene 7 pies de más que otra. Las dos se colocan en un piso plano con las patas inferiores a 8 pies de la base de un muro vertical. La escalera más larga alcanza 9 pies de más en el muro que la otra. ¿Qué largo tiene?
20. Dos escaleras se colocan contra un muro vertical. Las extremidades superiores de escaleras se encuentran a 24 pies sobre el nivel del piso. Una escalera tiene 1 pie más de largo que la otra. Las patas inferiores de la escalera más larga están a 3 pies más de distancia desde la base del muro que las patas de la escalera más corta. Dar el largo de ambas escaleras.
21. Se amarran dos alambres rectos en un punto situado a 24 pies arriba de la base de un poste vertical plantado en un suelo plano. Un alambre es 5 pies más largo que el otro y alcanza un punto en el suelo 11 pies más lejos de la base. Dar el largo de ambos alambres.
22. El radio de la base de cada uno de dos conos circulares rectos es de 8 pulgadas. La altura del primer cono es de 9 pulgadas más grande que la del segundo cono y la altura de sus lados es de 7 pulgadas más de largo. Dar la altura del cono más grande.
23. Un hombre se encuentra en cierto punto de la ribera este de un río derecho que corre hacia el sur. A cierta distancia abajo de él se encuentra un muelle, y a 8 millas al este del muelle se encuentra una granja. El hombre puede remar 6 millas por hora río abajo y puede caminar 4 millas por hora. Cuando va en lancha hasta el muelle y camina después hasta la granja le toma 15 minutos más de que al caminar directamente a la granja. ¿A qué distancia está del muelle?

6.8. Carácter de las raíces.

Debe recordarse que las dos raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (1)$$

La expresión

$$b^2 - 4ac,$$

que aparece debajo del signo radical se llama la *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Cuando a, b, c son números reales, entonces la discriminante nos da la siguiente información en cuanto al carácter de las raíces:

$$\text{Cuando } b^2 - 4ac \text{ es } \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ 0 \end{array} \right\} \text{ las raíces son } \left\{ \begin{array}{l} \text{reales y desiguales} \\ \text{reales e iguales} \\ \text{imaginarias} \end{array} \right.$$

Cuando a b c son racionales,* las raíces son racionales cuando $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto (incluyendo cero); de otros modos son irracionales.

Cuando las raíces son imaginarias, tienen la forma $p + qi$ y $p - qi$, es decir, son cantidades imaginarias conjugadas.

Dos raíces iguales se llaman frecuentemente una *raíz doble*.

Los ejemplos que se dan a continuación en una tabla ilustran el uso del discriminante para determinar, sin resolver la ecuación cuadrática, el carácter de sus raíces. La columna final no es necesaria, pero se incluye aquí para fines de verificación.

Cuando falta en una ecuación cuadrática el término constante, una raíz de la ecuación es cero. Así, la ecuación $2x^2 - 3x = 0$ tiene una raíz 0 (la otra raíz es 3/2).

Cuando faltan tanto el término constante como el término de primer grado, ambas raíces de la ecuación cuadrática son cero; esto es, desde luego, una ecuación trivial. Así, las raíces de $2x^2 = 0$ son 0 y 0.

Ecuación	*Discriminante* $b^2 - 4ac$	*Las raíces son*	*Valores de raíces*
$3x^2 - 4x - 7 = 0$	$(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 16 + 84 = 100$	real y desigual (también racional puesto que 100 es un cuadrado perfecto)	$\tfrac{7}{3}$, -1
$2x^2 + 2x + 5 = 0$	$2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 4 - 40 = -36$	imaginaria	$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}i$, $-\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}i$
$4x^2 + 12x + 9 = 0$	$(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$	real e igual (también racional desde luego)	$-\tfrac{3}{2}$, $-\tfrac{3}{2}$

Cuando falta el término de primer grado, pero que existe el término constante, una raíz es la negativa de la otra. Así, las raíces de $2x^2 - 3 = 0$

* Ver núm. 5.7.

son $x = \sqrt{3/2}$ y $x = -\sqrt{3/2}$; las raíces de $x^2 + 4 = 0$ son $x = 2i$ y $x = -2i$.

EJERCICIOS VI. D

Determinar el carácter de las raíces de las ecuaciones siguientes sin resolverlas:

1. $x^2 - 7x - 12 = 0$.
2. $x^2 - 7x + 12 = 0$.
3. $9x^2 + 42x + 49 = 0$.
4. $2x^2 - 2x + 3 = 0$.
5. $14x^2 - 22x + 13 = 0$.
6. $7x^2 - 8x - 10 = 0$.
7. $6x^2 + 19x + 15 = 0$.
8. $4x^2 + 20x + 25 = 0$.
9. $8x^2 - 7x - 9 = 0$.
10. $12x^2 - 19x - 18 = 0$.
11. $289x^2 + 306x + 81 = 0$.
12. $2166x^2 - 1923x + 2087 = 0$.

Determinar los valores de k que harán iguales las raíces de las ecuaciones siguientes:

13. $x^2 + kx + k = 0$.

Solución. $b^2 - 4ac = k^2 - 4k = 0$,

$$k = 0, 4.$$

Si $4 = 0$ la ecuación se reduce a $x^2 = 0$, que tiene cero para ambas raíces. Si $k = 4$, la ecuación se reduce a $x^2 + 4x + 4 = 0$ con ambas raíces $x = -2$.

14. $kx^2 + 2x - 3 = 0$.
15. $16x^2 - 8x + 3 = k$.
16. $2x^2 - 7x + 8 = kx$.
17. $16x^2 - 8x + 3 = kx^2$.
18. $kx^2 + 3x + k = 0$.
19. $kx^2 + kx + 7 = 0$.
20. $(k + 3)x^2 + (x - 3)k^2 = 0$.
21. $(x - 1)^2k - (k - 1)^2x = 0$.
22. $(x - 3)(3 - x) + (x - 3)(3 - k) + (k - 3)(3 - k) = 0$.
23. $(x + 1)(x + 2) - (k + 2)(x + 2) = 0$.
24. $(x + 1)(x - 2) + (k - 2)(x + 1) + (k - 1)(x + 2) = 0$.

Determinar k en cada una de las ecuaciones siguientes de manera que una raíz de la ecuación sea cero.

25. $3x^2 - 7x + 11 = k$.
26. $(x + 2)^2 - (k + 3)^2 = 0$.
27. $x^2 + k^2 - 2(x^2 - 1) + 3(x - k) = 0$.
28. $(kx - 2)^2 + 3(x - 2)^2 - (k - 2)^2 = 0$.
29. $(kx - 3)^2 - (k - 3)(x - 3)^2 = 0$.
30. $\dfrac{x - 1}{k - 1} + \dfrac{k + 2}{x + 2} = 1$.

Determinar k de manera a que una raíz de cada una de las ecuaciones siguientes sea la negativa de la otra.

31. $x^2 + k^2 + x + k + kx = 0.$
32. $(x + k)^2 + 3(x + k) + 7 = 0.$
33. $\frac{kx^2}{5} + \frac{5x}{k} - \frac{kx}{5} - \frac{5}{k} = 0.$
34. $\frac{x^2 - 4}{k^2 - 4} = \frac{x + k}{k - 2} + \frac{x - k}{k + 2}.$
35. $(kx + 3)^2 + (x + 2k)^2 + 3x + 2k = 0.$
36. $(7x + k)^2 - 7(7k + x) + 7kx = 0.$
37. Dada la ecuación.

$$(x - 1)^2 + 2(k - 1)(x + 1) + (k + 1)^2 = 0.$$

Determinar k de manera a que (a) no tenga raíces iguales, (b) que una raíz sea cero, (c) que una raíz sea la negativa de la otra.

6.9. Suma y productos de las raíces.

Cuando escribimos r para radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$, entonces las ecuaciones (1) del núm. 6.8 se reducen a

$$x_1 = \frac{-b + r}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - r}{2a}$$

Entonces

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + r}{2a} + \frac{-b - r}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{b^2 - r^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Es decir, en la cuadrática ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, la suma de las raíces es $-\frac{b}{a}$ y el producto de las raíces es $\frac{c}{a}$.

Es, quizás, más sencillo dividir la ecuación completa por el coeficiente de x^2, reduciéndolo a la forma $x^2 + px + q = 0$. Entonces podemos afirmar que en la ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$, la suma de las raíces es $-p$ y el producto de las raíces es q.

Ejemplo.

Dar la suma y el producto de las raíces de la ecuación

$$3x^2 - 4x - 7 = 0.$$

SOLUCIÓN. Dividir por 3:

$$x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} = 0$$

Suma de raíces $= -\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

Producto de raíces $= -\frac{7}{3}$.

Estos resultados pueden fácilmente comprobarse en el ejemplo citado, resolviendo la ecuación. Las raíces son $\frac{7}{3}$ y -1.

6.10. Formación de una ecuación con raíces dada.

Cuando x_1 y x_2 son las raíces de una ecuación cuadrática, la ecuación puede entonces escribirse $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Ejemplo 1.

Dar la ecuación cuyas raíces son 2 y $-$ 3.

SOLUCIÓN. Método 1. $(x - 2)(x + 3) = 0,$
$x^2 + x - 6 = 0.$

Método 2.

Suma de raíces $= 2 - 3 = -1 = -p,\ p = 1.$
Productos de raíces $= 2(-3) = -6 = q.$

$$x^2 + px + q \equiv x^2 + x - 6 = 0.$$

Ejemplo 2.

Dar una ecuación cuyas raíces son $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN. $$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Multiplicando por 3 : 2 para eliminar fracciones:

$$3\left(x - \frac{2}{3}\left(\ 2\ \right)x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$(3x - 2)(2x + 1) = 0,$$
$$6x^2 - x - 2 = 0.$$

Ejemplo 3.

Dar una ecuación cuyas raíces son 2, -3, 7.

Solución.
$$(x - 2)(x + 3)(x - 7) = 0,$$
$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0.$$

Notar que esta ecuación no es cuadrática.

Ejemplo 4.

Dar una ecuación cuyas raíces son x_1 y x_2.

Solución.
$$(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$
$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Comparar este resultado con el núm. 6.9.

Ejemplo 5.

Dar una ecuación cuyas raíces son $1 + i$ y $1 - i$.

Solución.
$$[x - (1 + i)][x - (1 - i)] = 0,$$
$$[(x - 1) - i][(x - 1) + i] = 0,$$
$$(x - 1)^2 - i^2 = 0,$$
$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

O, puesto que $(1 + i) + (1 - i) = 2$, $p = -2$; y puesto que $(1 + i)(1 - i) = 2$, $q = 2$. En este caso el Método 2 es el más sencillo.

EJERCICIOS VI. E

Dar, sin resolver, la suma y el producto de las raíces de las ecuaciones siguientes:

1. $x^2 + 7x + 12 = 0$.
2. $x^2 - 3x - 4 = 0$.
3. $5x^2 - 22x - 17 = 0$.
4. $8x^2 - x + 22 = 0$.
5. $7 - 8x - 9x^2 = 0$.
6. $(5x + 4)^2 = 18$.
7. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$.
8. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{2} = 0$.
9. $32x^2 - 5x = 0$.
10. $32x^2 - 5 = 0$.
11. $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) + (x - 3)(x - 4) = 0$.

Determinar el valor de k en las ecuaciones siguientes:

12. $x^2 + kx + 18 = 0$, dado que una raíz es dos veces la otra.

Solución. Que r = una raíz; entonces $2r$ es la otra.

$$\left.\begin{aligned} r + 2r &= -k, \\ r \cdot 2r &= 18; \end{aligned}\right\} \quad \text{o} \quad \left\{\begin{aligned} 3r &= -k, \\ r^2 &= 9, \quad r = \pm 3. \end{aligned}\right.$$
$$k = -3r = \mp 9.$$

13. $x^2 + kx + 5 = 0$, dado que una raíz es 4.

SUGESTIÓN PARA UN MÉTODO ALTERNO DE SOLUCIÓN.
Puesto que 4 es una raíz, puede sustituirse por x y la ecuación resultante puede resolverse por k.

14. $2x^2 - 9x + k = 0$, dado que una raíz es dos veces la otra.
15. $3x^2 - 10x + k = 0$, dado que una raíz es 2 veces más que la otra.
16. $2x^2 - 9x + k = 0$, dado que una raíz es 3 más que el doble de la otra.
17. $4x^2 - 15x + k = 0$, dado que una raíz es el cuadrado de la otra.
18. $3x^2 - kx + 6 = 0$, dado que una raíz es 3.
19. $4x^2 + kx + 7 = 0$, dado que la diferencia entre las raíces es de 3.
20. $2x^2 + kx + 9 = 0$, dado que una raíz es dos veces la otra.
21. $7x^2 + kx - 4 = 0$, dado que el cociente de las raíces es $-\frac{9}{28}$.
22. $ax^2 + bx + k = 0$, dado que las raíces son recíprocas entre sí.
23. $ax^2 + bx + k = 0$, dado que cada raíz es la recíproca negativa de la otra.

Dar las ecuaciones, cuadráticas de ser posible, y con coeficientes integrales, cuyas raíces son

24. 7, 9.
25. -4, 8.
26. 6, 6.
27. 0, 35.
28. $\frac{5}{6}, -\frac{7}{4}$.
29. $\pm\frac{5}{6}$.
30. $\pm\sqrt{17}$
31. $\pm 13i$.
32. $\pm i\sqrt{15}$.
33. $\pm 3\sqrt{5} \cdot i$.
34. $6 \pm 7i$.
35. $5 \pm i\sqrt{3}$.
36. $\frac{1}{2}(7 \pm 3\sqrt{5} \cdot i)$.
37. $\frac{1}{6}(17 \pm 2\sqrt{3} \cdot i)$.
38. $\sqrt{3} \pm i\sqrt{6}$.
39. $2, -5, 6$.
40. $4, \frac{5}{6}, -\frac{3}{4}$.
41. $6, \pm 5$.
42. $3, 1 \pm i$.
43. $5, 3 \pm \sqrt{2}$.
44. $1, 8 \pm i\sqrt{3}$.
45. $2, 3 \pm 2\sqrt{2} \cdot i$.
46. $0, 5 \pm 3\sqrt{7}$.
47. $-2, 5 \pm 3\sqrt{7} \cdot i$.

6.11. Para factorizar resolviendo una cuadrática.

Una expresión cuadrática con coeficientes racionales puede factorizarse en factores racionales siempre y cuando su discriminante es un cuadrado perfecto.

Ejemplo.

Factor $\quad 3x^2 - 4x - 7$.

SOLUCIÓN. $b^2 - 4ac = 100$. Resolver la ecuación

$$3x^2 - 4x - 7 = 0.$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{6} = \frac{4 \pm 10}{6} = \frac{7}{3}, -1.$$

Los factores de la expresión original son

$$3\left(x - \frac{7}{3}\right)(x + 1), \text{ o } (3x - 7)(x + 1).$$

En general, los factores de $ax^2 + bx + c$ son

$$a(x - x_1)(x - x_2),$$

donde x_1 y x_2 se dan por (1) del núm. 6.8.

EJERCICIOS VI. F

Factorizar las expresiones siguientes, resolviendo primero las ecuaciones correspondientes:

1. $168x^2 + 110x - 7623$.
2. $128x^2 - 1896x + 6075$.
3. $500x^2 + 4140x + 3577$.
4. $646x^2 + 9711x - 256$.

Encontrar lo irracional o los factores imaginarios de las expresiones siguientes:

5. $x^2 - 2x - 1$.

SOLUCIÓN. Dejar que $x^2 - 2x - 1 = 0$ y resolver, lo que da

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Los factores son

$$[x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})], \text{ o}$$
$$(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$$

6. $x^2 + 36$.
7. $x^2 - 6$.
8. $x^2 + 6$.
9. $x^2 - x + 1$.
10. $2x^2 - 3x + 7$.
11. $5x^2 - 3x - 4$.
12. $2x^2 - 3x + 5$.
13. $3x^2 - 8x + 6$.
14. $x^2 + 2\sqrt{3} \cdot x - 1$.
15. $x^2 - 2\sqrt{5} \cdot x - 4$.
16. $3x^2 - 4\sqrt{3} \cdot x + 2$.
17. $4x^2 - 6\sqrt{5} \cdot x - 3$.

6.12. Representación gráfica de una función cuadrática.

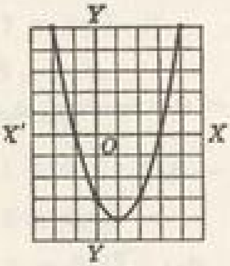
Cuando tenemos una función cuadrática como $x^2 - 2x - 3$, podemos dar el valor $y = x^2 - 2x - 3$, encontrar los valores de y que corres-

$y = x^2 - 2x - 3$

x	y
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5

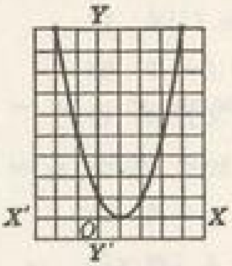
ponden a los valores asignados para x (ver la tabla adjunta), y dibujar el diagrama. La gráfica de esta función se ve en la gráfica 6.1. La curva se llama una parábola. (La gráfica de cualquier función cuadrática es una parábola.) Los puntos en los cuales la curva atraviesa el eje x, saber, $x = -1$ y $x = 3$, son los *ceros* reales de la función cuadrática, o las raíces reales de la ecuación correspondiente, $x^2 - 2x - 3 = 0$.

La gráfica de la función $y = x^2 - 2x + 1$ se ve en la gráfica 6.2. La ecuación que se obtiene al establecer la función igual a cero tiene raíces iguales (es decir, una raíz doble) $x = 1$, y se ha de observar que la curva toca el eje x en el punto $x = 1$ solamente.



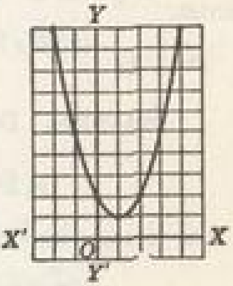
GRÁF. 6.1.

Gráfica de la función cuadrática $x^2 - 2x - 3$. Las raíces de la ecuación correspondiente son reales y desiguales.



GRÁF. 6.2.

Gráfica de la función cuadrática $x^2 - 2x + 1$. Las raíces de la ecuación correspondiente son reales e iguales.



GRÁF. 6.3.

Gráfica de la función cuadrática $x^2 - 2x + 2$. Las raíces de la ecuación correspondiente son imaginarias.

La gráfica 6.3. muestra el trazo de $y = x^2 - 2x + 2$. La ecuación correspondiente tiene raíces imaginarias $x = 1 \pm i$, y la cuarva no se encuentra con el eje x.

En general, la gráfica de una función cuadrática cruza el eje x en dos puntos distintos si las raíces de la ecuación que se obtiene al establecer la función igual a cero son reales y desiguales, toca el eje x si son reales e iguales y no encuentra el eje x nunca si son imaginarias.

6.13. Valor máximo y mínimo de una función cuadrática.

El punto más bajo de la curva que representa la función cuadrática corresponde al *mínimo*, o el menor valor de la función. Cuando la curva es invertida respecto a la posición mostrada en las gráficas 6.1, 6.2, 6.3, como sería el caso si el coeficiente de x^2 esté negativo, el punto más alto en la curva corresponde al *máximo*, o el más grande valor de la función. Un método para encontrar el valor máximo o el valor mínimo de una función cuadrática completando el cuadrado se ilustra en los ejemplos indicados a continuación.

La determinación de las máxima y mínima es de gran importancia práctica.

Ejemplo 1.

Dar el valor mínimo de $3x^2 - 2x + 4$.

SOLUCIÓN.

$$y = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 4$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 4 - \frac{1}{3}$$

$$= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}.$$

El término $3(x - 1/3)^2$ es siempre positivo o cero; por lo tanto y no puede ser nunca menor de $11/3$. Es igual a este valor mínimo de $11/3$ cuando $x = 1/3$.

Ejemplo 2.

Dar el valor máximo de $-5x^2 - 4x + 7$.

SOLUCIÓN.

$$y = -5x^2 - 4x + 7$$

$$= -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x\right) + 7$$

$$= -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) + 7 + \frac{4}{5}$$

$$= -5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{39}{5}.$$

El término $-5(x + \frac{3}{5})^2$ es siempre negativo o cero, y el valor máximo de y es $\frac{29}{5}$; y es igual a $\frac{29}{5}$ cuando $x = -\frac{3}{5}$.

EJERCICIOS VI. G

Dibuje las gráficas de las funciones siguientes:

1. $x^2 - 16$.
2. $4 - x^2$.
3. $x^2 - 5x$.
4. $7x - x^2$.
5. $x^2 + 4x$.
6. $x^2 + x - 6$.
7. $x^2 - 2x - 8$.
8. $5 - 4x - x^2$.
9. $x^2 - x + 3$.
10. $\frac{1}{2}x^2 - 5x - 7$.
11. $2x^2 - 3x - 4$.
12. $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$.
13. $12 + 5x - 2x^2$.
14. $9 + 2x - \frac{1}{2}x^2$.

Dar el valor máximo o el valor mínimo de cada una de las funciones siguientes y el valor correspondiente de x. Indicar si es valor máximo o mínimo.

15. $x^2 - 8x + 2$.
16. $x^2 - 6x + 12$.
17. $x^2 + 4x + 11$.
18. $13 - 2x - x^2$.
19. $10 + 6x - x^2$.
20. $x^2 - 5x + 3$.
21. $2x^2 - 8x + 7$.
22. $3x^2 - 4x - 12$.
23. $9x - x^2$.
24. $x^2 + 7x$.
25. $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$.
26. $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$.
27. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.
28. $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^2$.
29. $x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 2$.
30. $6 - \sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{2} \cdot x^2$.
31. Un muro de piedra de un largo indefinido existe para cercar un lado de un prado rectangular que tiene que bardearse en los otros tres lados. ¿Cuál es la superficie máxima que puede cercarse con 400 pies de cerca?
32. Un hombre quiere cercar un terreno rectangular, del cual un lado es la línea divisoria de su propiedad. Tiene \$ 600.00 para gastar en la cerca, que cuesta \$ 2.00 el pie. Tiene que pagar por los tres lados del terreno que están enteramente suyos y por la mitad de la parte que es línea divisoria. ¿Cuál es la superficie máxima que puede cercar?
33. Un cine que tenía un promedio diario de 1,500 entradas pagadas, redujo el precio de admisión de 80 centavos a 75 centavos. El resultado de esto fue un aumento de 100 en el promedio diario de entradas pagadas. Suponiendo que por cada 5 centavos de reducción en el precio de admisión el número de entradas pagadas aumentaría en 100, dar el precio que permitirá recabar el máximo de entradas.
34. Un fabricante puede enviar ahora una carga de 200 toneladas con una utilidad de \$ 15.00 por tonelada. Calcula, sin embargo, que es-

perando, puede agregar 10 toneladas por semana al embarque, pero que la utilidad sobre todo lo que manda disminuirá en 50 centavos por tonelada por semana. ¿Hasta cuándo será ventajoso para él esperar?

35. Un comerciante puede vender 100 artículos al día al precio de \$ 5.00 pieza. Puede vender 5 artículos menos al día por cada 25 centavos que agrega al precio. Si paga \$ 3.00 por pieza al mayoreo por dichos artículos, ¿cuál precio al menudeo le ha de reportar la máxima utilidad?

36. Comprobar que el rectángulo que tiene una máxima superficie con un perímetro fijo es un cuadrado.

37. Comprobar que si se separa un número positivo en dos factores cuyo producto es un máximo, los factores deben ser iguales.

CAPITULO VII

Sistemas de ecuaciones involucrando cuadráticas

7.1. Ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas.

El *grado* de un término en dos o más variables es la suma de los exponentes de todas las variables. (Se entiende que estos exponentes son números enteros positivos.) Así, $4x^3y^2$ es del grado 5, $-2x^4y^2z^5$ es del grado 11, x^2y es del grado 3 (ver núm. 3.1).

El *grado* de una expresión o ecuación es el grado del término o de los términos del más alto grado que ocurra en ella.

Una *ecuación cuadrática* es una ecuación del segundo grado.

En el caso de dos incógnitas, x e y, los únicos términos del segundo grado son del tipo ax^2, bxy, cy^2, y la ecuación cuadrática del segundo grado en x e y más generalizada es

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad (1)$$

con términos del primer grado y un término constante (grado cero) disponible.

Cuando tenemos dos ecuaciones simultáneas como (1), con todos los términos presentes, la solución es, por lo general, bastante difícil; para ciertos casos, sin embargo, que se han de considerar en este capítulo, la solución puede encontrarse siempre.

7.2. Una ecuación lineal, otra cuadrática.

Cuando tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, una de las cuales es lineal y la otra cuadrática, la solución puede obtenerse sustituyendo de la ecuación lineal en la cuadrática.

Ejemplo.

Resolver:

$$3x - 2y = 5,$$
$$x^2 - xy + 2y = 7.$$

SOLUCIÓN. De la primera ecuación,

$$y = \frac{3x - 5}{2}.$$

Sustituir en la segunda ecuación:

$$x^2 - \frac{3x^2 - 5x}{2} + 3x - 5 = 7,$$
$$2x^2 - 3x^2 + 5x + 6x - 10 = 14,$$
$$x^2 - 11x + 24 = 0,$$
$$x = 3, 8.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación *lineal*, tenemos

$$y = \frac{3x - 5}{2} = 2, \frac{19}{2}.$$

Las contestaciones deben escribirse en pares como sigue:

$$(x = 3, y = 2), \quad \left(x = 8, y = \frac{19}{2}\right)$$

Ambos pares de valores satisfacen ambas ecuaciones.

EJERCICIOS VII. A

Resolver por x y y:

1. $x^2 + y^2 = 13$, $2x + y = 8$.
2. $y^2 = 9x$, $y = -9x$.
3. $x^2 - 8y = 0$, $x - 3y + 2 = 0$.
4. $x^2 - y^2 = 16$, $3x + 2y = 9$.
5. $x^2 - xy - 28 = 0$, $2x - 5y - 1 = 0$.
6. $xy - 12 = 0$, $x - y + 1 = 0$.
7. $x^2 + 3xy - 2y^2 = 4$, $5x - 3y = 1$.
8. $2xy - 3y^2 + 1 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$.
9. $x^2 + y^2 + x + y = 22$, $5x + 7y = 6$.
10. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$, $7x - y - 6 = 0$.
11. $x^2 + y^2 = 9$, $x + y = 9$.
12. $x^2 - y^2 = 9$, $x - y = 9$.
13. $2x^2 - 3y - 6 = 0$, $5x - 4y + 1 = 0$.
14. $x^2 - 2y - 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$.
15. $y^2 - 12x - 8y - 8 = 0$, $3x - y + 11 = 0$.
16. $9x^2 + 16y^2 + 18x - 32y - 119 = 0$, $x - y - 3 = 0$.
17. $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$, $x - 7y + 35 = 0$.

18. $3x^2 + 2y^2 - 563 = 0,$
$2x - 3y - 8 = 0.$
19. $9x^2 + 16y^2 + 18x + 32y - 119 = 0,$
$3x - 4y - 13 = 0.$
20. $x^2 + y^2 - 14y - 120 = 0,$
$5x - 12y + 84 = 0.$
21. $7x^2 + 5xy + 2x - 3y + 2 = 0,$
$4x - 3y + 14 = 0.$
22. $3x^2 + 2xy + y^2 + x + 5y - 6 = 0,$
$x - y - 3 = 0.$

23. La hipotenusa de un triángulo recto es de 13 pulgadas. Su perímetro es de 30 pulgadas. Dar el largo de su lado más corto.
24. La superficie de un triángulo recto es de 210 pulgadas cuadradas. Su perímetro es de 70 pulgadas. Dar el largo de su hipotenusa.
25. La superficie total de las superficies de dos cubos es de 312 pulgadas cuadradas, el largo total de sus aristas es de 120 pulgadas. Dar el largo de la arista de cada cubo.
26. La diferencia entre los cuadrados de los dígitos de un número positivo de dos cifras es 27. Cuando se invierten los dígitos y el número resultante se sustrae del número original, la diferencia entre ellos es también 27. ¿Cuál es el número original?

7.3. Ecuaciones lineales en los cuadrados de las incógnitas.

Cuando las incógnitas se presentan solamente como cuadradas, las ecuaciones cuadráticas simultáneas pueden resolverse empleando los métodos indicados para la resolución de ecuaciones lineales simultáneas.

Ejemplo.

Resolver las ecuaciones simultáneas

$$4x^2 + 3y^2 = 127, \qquad (1)$$
$$5x^2 - 4y^2 = 89. \qquad (2)$$

Solución. Las operaciones que se efectuaron para llegar a la solución están indicadas a la izquierda.

$4 \cdot (1)$	$16x^2 + 12y^2 = 508.$	(3)
$3 \cdot (2)$	$15x^2 - 12y^2 = 267.$	(4)
$(3) + (4)$	$31x^2 = 775.$	(5)
$(5) \div 31$	$x^2 = 25,$	(6)
	$x = \pm 5.$	
(1)	$3y^2 = 127 - 4x^2 = 127 - 100 = 27,$	
	$y = \pm 3.$	

Los resultados deben ponerse por pares de la manera siguiente:

$$(x = 5, y = 3), \qquad (x = 5, y = -3),$$
$$(x = -5, y = 3), \qquad (x = -5, y = -3).$$

Los cuatro pares de valores satisfacen ambas ecuaciones.

EJERCICIOS VII. B

Resolver por x e y:

1. $x^2 + 2y^2 = 17$, $x^2 - y^2 = 5$.
2. $3x^2 - 5y^2 = -5$, $4x^2 + y^2 = 116$.
3. $2x^2 + 3y^2 = 20$. $3x^2 + 2y^2 = 25$.
4. $7x^2 - 2y^2 = 27$, $3x^2 + 4y^2 = 31$.
5. $2x^2 - 9y^2 = 170$, $5x^2 - 10y^2 = 525$.
6. $3x^2 - 8y^2 = 80$. $5x^2 + 6y^2 = 56$.
7. $4x^2 - 5y^2 = -47$, $3x^2 + 2y^2 = -18$.
8. $5x^2 - 26y^2 = 111$, $7x^2 + 8y^2 = 0$.
9. $10x^2 + 7y^2 = 8$, $11x^2 + 5y^2 = 4$.
10. $7x^2 + 8y^2 = 17$, $8x^2 + 9y^2 = 20$.
11. $13x^2 + 27y^2 = 295$, $22x^2 - 23y^2 = -119$.
12. $95x^2 + 18y^2 = 23$, $85x^2 + 42y^2 = -1$.
13. Los medianos de los dos lados de un triángulo recto son 45 y 60. Dar el largo de los lados.

7.4. Todos los términos involucran las incógnitas del segundo grado.*

Cuando todos los términos involucrando x e y son del segundo grado, procedemos como en los ejemplos siguientes.

Ejemplo.

Resolver:

$$2x^2 + 5xy - 10y^2 = 8, \tag{1}$$
$$x^2 - 2xy + 3y^2 = 3. \tag{2}$$

Solución. Multiplicar (1) por 3 y (2) por 8, de manera que los términos constantes sean los mismos :

$$6x^2 + 15xy - 30y^2 = 24, \tag{3}$$
$$8x^2 - 16xy + 24y^2 = 24. \tag{4}$$

Sustraer (3) de (4):

$$2x^2 - 31xy + 54y^2 = 0. \tag{5}$$

* Notar que las cuadráticas simultáneas del tipo considerado en la sección anterior (es decir, lineales en los cuadrados de las incógnitas) son también de este tipo.

Resolver por x en términos de y. Esto puede lograrse por medio de factorización.

$$(x - 2y)(2x - 27y) = 0. \tag{6}$$

$$x = 2y, \quad x = \frac{27}{2}y. \tag{7}$$

Sustituyendo $x = 2y$ en (2), obtenemos

$$3y^2 = 3, \quad y = \pm 1. \tag{8}$$

$$x = 2y = \pm 2. \tag{9}$$

Sustituyendo $x = \frac{27}{2}y$ en (2) y resolviendo por y, obtenemos

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{211}}$$

$$x = \frac{27}{2}y = \pm \frac{27}{\sqrt{211}}.$$

Los valores deben colocarse por pares como sigue:

$(x = 2, y = 1)$, $\quad (x = -2, y = -1)$,

$\left(x = \frac{27}{\sqrt{211}}, y = \frac{2}{\sqrt{211}}\right)$, $\quad \left(x = -\frac{27}{\sqrt{211}}, y = -\frac{2}{\sqrt{211}}\right)$.

Los valores conteniendo radicales en el denominador pueden racionalizarse cuando se desea, por ejemplo,

$$\frac{27}{\sqrt{211}} = \frac{27\sqrt{211}}{211}, \quad \frac{2}{\sqrt{211}} = \frac{2\sqrt{211}}{211}.$$

Nota. Las ecuaciones de este tipo pueden resolverse también por el método siguiente: Indicar $y = tx$ en ambas ecuaciones. Resolver cada ecuación por x como una función de t. Igualizar estas dos funciones y resolver por t. Entonces, encontrar x. Finalmente encontrar y, que es igual a tx.

EJERCICIOS VII. C

1. Resolver el ejemplo indicado arriba por medio del método sugerido en la nota.

Resolver por x y por y:

2. $x^2 + 2xy = 16$,
   $xy = 6$.
3. $3x^2 - 2xy = 7$,
   $3xy + y^2 = -2$.
4. $x^2 + xy = -2$,
   $2xy + y^2 = 3$.
5. $x^2 + 5xy = -36$,
   $xy - y^2 = -24$.

6. $x^2 + 2xy = 16,$
$xy - 2y^2 = -12.$

7. $8x^2 + 3y^2 = 140,$
$8xy + 5y^2 = 84.$

8. $x^2 - 4xy = -20,$
$x^2 - xy + 3y^2 = 25.$

9. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 20,$
$2x^2 - xy - y^2 = -35.$

10. $4x^2 + 3y^2 = 48,$
$2xy + y^2 = 16.$

11. $8x^2 + xy = 6,$
$2xy + y^2 = 7.$

12. $2x^2 + 3xy + y^2 = 3,$
$x^2 + 3xy - y^2 = -3.$

13. $3x^2 - xy - y^2 = 9,$
$x^2 - y^2 = -27.$

14. $x^2 - xy + y^2 = 3,$
$x^2 + 2xy = 5.$

15. $x^2 - 2xy + y^2 = 16,$
$2x^2 + xy + y^2 = 88.$

16. La superficie de un triángulo recto es de 84 pulgadas cuadradas; su hipotenusa es de 25 pulgadas. Dar los largos de los dos lados.

17. La superficie de un triángulo recto es de 108 pulgadas cuadradas; la mediana de uno de sus lados es de 15 pulgadas. Dar los largos de sus dos lados.

7.5. Ecuaciones simétricas.

Una ecuación se llama *simétrica* con dos incógnitas cuando la ecuación no varía al intercambiar las dos incógnitas,* por ejemplo,

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + x + y - 7 = 0.$$

Ecuaciones cuadráticas simultáneas, simétricas las dos, pueden resolverse al sustituir una incógnita por $u + v$, y la otra por $u - v$.

Ejemplo.

Resolver:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + x + y - 50 = 0, \quad (1)$$
$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y - 29 = 0. \quad (2)$$

Solución. Que $x = u + v$, $y = u - v$.

De (1) $\qquad 4u^2 + 8v^2 + 2u - 50 = 0. \quad (3)$

(3) ÷ 2 $\qquad 2u^2 + 4v^2 + u - 25 = 0. \quad (4)$

De (2) $\qquad 4u^2 + 4v^2 - 6u - 29 = 0. \quad (5)$

(5) — (4) $\qquad 2u^2 - 7u - 4 = 0. \quad (6)$

$$u = 4, -\frac{1}{2}.$$

* Notar que algunas cuadráticas simultáneas simétricas pueden clasificarse de otro modo. Así, las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 25, \quad xy = 12$$

son del tipo considerado en la sección anterior y pueden resolverse por los métodos expuestos en esta sección o por los métodos de la presente sección. Pueden probablemente resolverse más fácilmente sustituyendo $y = 12/x$ de la segunda ecuación en la primera.

Sustituir $u = 4$ en (4):

$$4v^2 = -2u^2 - u + 25 = -11,$$
$$v = \pm \frac{i}{2}\sqrt{11}.$$
$$x = u + v = 4 \pm \frac{i}{2}\sqrt{11},$$
$$y = u - v = 4 \mp \frac{i}{2}\sqrt{11}.$$

Sustituir $u = -\frac{1}{2}$ en (4):

$$4v^2 = 25, \qquad v = \pm\frac{5}{2}.$$
$$x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2, \qquad y = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3.$$
$$x = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3, \qquad y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2.$$

Las contestaciones deben colocarse por pares como sigue:

$$\left(x = 4 + \frac{i}{2}\sqrt{11}, \qquad y = 4 - \frac{i}{2}\sqrt{11}\right),$$
$$\left(x = 4 - \frac{i}{2}\sqrt{11}, \qquad y = 4 + \frac{i}{2}\sqrt{11}\right),$$
$$(x = 2,\ y = -3), \qquad (x = -3,\ y = 2).$$

Se ha de notar que las soluciones son simétricas, como forzosamente debe ser.

Será útil notar que en las ecuaciones cuadráticas simétricas las incógnitas pueden siempre agruparse en las formas $x^2 + y^2$, xy, $x + y$, y que para la sustitución $x = u + v$, $y = u - v$, tenemos

$$x^2 + y^2 = 2u^2 + 2v^2, \qquad xy = u^2 - v^2, \qquad x + y = 2u.$$

EJERCICIOS VII. D

Resolver por x e y:

1. $x^2 - 3xy + y^2 + 11 = 0$,
   $xy - x - y - 5 = 0$.
2. $x^2 + y^2 + x + y - 20 = 0$,
   $xy - 5 = 0$.
3. $xy - x - y + 7 = 0$,
   $x^2 + y^2 - 13 = 0$.
4. $2xy - 3x - 3y - 27 = 0$,
   $x^2 + y^2 - 13 = 0$.
5. $xy + x + y - 2 = 0$,
   $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
6. $x^2 + y^2 - x - y = 12$,
   $xy + x + y = 9$.

7. $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0,$
$x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0.$
8. $x^2 - 3xy + y^2 - 2x - 2y - 15 = 0,$
$xy + 2x + 2y - 1 = 0.$
9. $2(x + y)^2 - 3(x - y)^2 + x + y - 52 = 0,$
$(x - y)(y - x) + xy - 5 = 0.$
10. $x(y - 2) + y(x - 2) + 2 = 0,$
$x^2 + y^2 - (x + 2)(y + 2) + 1 = 0.$
11. La superficie de un rectángulo es de 192 pulgadas cuadradas, su diagonal es de 20 pulgadas. Dar sus dimensiones.

7.6. Diversos métodos y tipos.

A veces, unos métodos especiales son más breves que los que se han dado anteriormente.

Ejemplo 1.

Resolver:

$$x^2 + y^2 = 25, \quad (1)$$
$$xy = 12. \quad (2)$$

SOLUCIÓN. Estas ecuaciones son simétricas y, además, se encuentran bajo el caso en el cual todos los términos involucrando las incógnitas son del segundo grado. Pueden, por lo tanto, resolverse por cualquiera de estos casos. Ver la nota del núm. 7.5. Sin embargo, el método siguiente es quizá más claro:

De (2) $\quad 2xy = 24. \quad (3)$

(1) + (3) $\quad x^2 + 2xy + y^2 = 49, \quad x + y = \pm 7. \quad (4)$

(1) — (3) $\quad x^2 - 2xy + y^2 = 1, \quad x - y = \pm 1. \quad (5)$

$x + y = 7,\quad x + y = 7,\quad x + y = -7,\quad x + y = -7,$
$x - y = 1;\quad x - y = -1;\quad x - y = 1;\quad x - y = -1;$

$(x = 4, y = 3),\quad (x = 3, y = 4),\quad (x = -3, y = -4),$
$(x = -4, y = -3).$

Los métodos que se han desarrollado para sistemas de ecuaciones involucrando cuadráticas pueden emplearse a veces en sistemas comprendiendo ecuaciones de más alto grado, como se muestra en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 2.

Resolver:

$$x^3 + y^3 = 35,$$
$$x + y = 5.$$

Notar que una ecuación es un cubo, la otra es lineal.

SOLUCIÓN. Dividir la primera ecuación por la segunda:

$$x^2 - xy + y^2 = 7.$$

Sustituir $y = 5 - x$ en esta última ecuación y reducir el resultado:

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$
$$x = 2, 3.$$
$$y = 3, 2.$$
$$(x = 2, y = 3), \qquad (x = 3, y = 2).$$

Ejemplo 3.

Resolver:

$$6x^2 - 7xy + 2y^2 = 0. \tag{6}$$
$$y = x^2 - 4. \tag{7}$$

SOLUCIÓN. En la ecuación (6) cada término es del segundo grado. Una ecuación de este tipo se llama *homogénea* del segundo grado. (Notar que en las ecuaciones homogéneas no puede haber término constante, puesto que un término de esta clase es del grado cero.)

Resolver (6) por y en términos de x, obteniendo

$$y = 2x, \qquad y = \tfrac{3}{2}x.$$

Sustituir $y = 2x$ en (7):

$$x^2 - 2x - 4 = 0,$$
$$x = 1 \pm \sqrt{5}.$$
$$y = 2x = 2(1 \pm \sqrt{5}).$$

Sustituir $y = \tfrac{3}{2}x$ en (7) y reducir:

$$2x^2 - 3x - 8 = 0,$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}.$$
$$y = \frac{3}{2}x = \frac{9 \pm 3\sqrt{73}}{8}.$$

La solución completa es

$$[x = 1 + \sqrt{5}, y = 2(1 + \sqrt{5})],$$
$$[x = 1 - \sqrt{5}, y = 2(1 - \sqrt{5})],$$
$$\left(x = \frac{3 + \sqrt{73}}{4}, y = \frac{9 + 3\sqrt{73}}{8}\right),$$
$$\left(x = \frac{3 - \sqrt{73}}{4}, y = \frac{9 - 3\sqrt{73}}{8}\right).$$

EJERCICIOS VII. E

Resolver por x e y:

1. $x^2 + y^2 = 61,$
   $xy = 30.$
2. $x^2 + 4y^2 = 85,$
   $xy = 21.$
3. $x^2 + 4y^2 = 37,$
   $xy + x + 2y = 10.$
4. $x^2 + xy = 8,$
   $xy + y^2 = 8.$
5. $x^3 + y^3 = 91,$
   $x + y = 7.$
6. $x^3 - 27y^3 = -91,$
   $x - 3y = -1.$
7. $x^3 + y^3 = 280,$
   $x^2 - xy + y^2 = 28.$
8. $8x^3 - y^3 = 152,$
   $4x^2 + 2xy + y^2 = 76.$
9. $x^4 - y^4 = 544,$
   $x^2 - y^2 = 16.$
10. $x^4 - y^4 = 240,$
    $x^2 + y^2 = 20.$
11. $x^4 + 4y^4 = 20,$
    $x^2 + 2xy + 2y^2 = 10.$
12. $x^4 - 16y^4 = 1040,$
    $x^2 - 4y^2 = 20.$
13. $3x^2 + 4xy - 4y^2 = 0,$
    $x^2 - 2y - 4 = 0.$
14. $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0,$
    $x^2 - 2x - 3y - 18 = 0.$
15. Dar la raíz cuadrada positiva de $5 + 2\sqrt{6}.$

SOLUCIÓN, Que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}.$

Cuadrado: $x + 2\sqrt{xy} + y = 5 + 2\sqrt{6}.$

Por lo tanto $x + y = 5,$

$$2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6}.$$

Estas ecuaciones tienen las soluciones $x = 3, y = 2,$ y $x = 2, y = 3.$

Así, $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$ Lo que puede comprobarse cuadrando $\sqrt{3} + \sqrt{2}.$

Dar las raíces cuadradas positivas de las cantidades siguientes:

16. $11 + 2\sqrt{30}.$
17. $9 + 6\sqrt{2}.$
18. $13 - 2\sqrt{22}.$
19. $25 - 10\sqrt{6}.$
20. $21 + 6\sqrt{10}.$
21. $55 - 22\sqrt{6}.$
22. $35 - 14\sqrt{6}.$
23. $34 + 2\sqrt{173}.$

7.7. Representación gráfica.

Las ecuaciones cuadráticas como las ecuaciones lineales pueden representarse en forma gráfica, bien que el diseño de las primeras sea generalmente más difícil. Los métodos gráficos son de poca utilidad para lograr la verdadera solución de las ecuaciones pero, con frecuencia, dan un significado más claro de los resultados. Los puntos de in-

tersección de las curvas corresponden a pares de valores reales de ambos variables que satisfacen las ecuaciones; los valores imaginarios no aparecen en la gráfica.

Los puntos de tangencia de las curvas corresponden a las soluciones dobles.

Ejemplo 1.

Dibujar las curvas representadas por las siguientes ecuaciones, resolviéndolas:

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad (1)$$
$$y = x^2 - 5. \qquad (2)$$

Solución. La primera ecuación corresponde a un círculo con su centro en el origen y con un radio de 5 unidades, puesto que las coordinadas x e y de cualquier punto en este círculo son (ya que $x + y = 5$) los

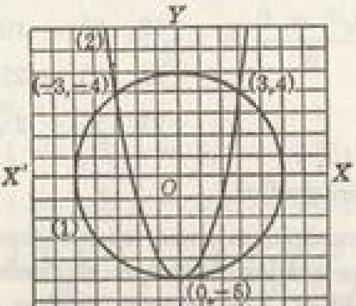
$y = x^2 - 5$

x	y
0	−5
±1	−4
±2	−1
±3	4
±4	11

Gráf. 7.1.

lados de un triángulo recto cuya hipotenusa es 5. (Ver Gráf. 7.1.) La otra ecuación puede ser representada al dar valores a x y encontrando los valores correspondientes de y. Cierto número de estos valores se ven en la tabla adjunta. La curva que se obtiene al dibujarlos es una parábola (ver núm. 6.12).

Ambas curvas se muestran en la Gráf. 7.2.



Gráf. 7.2.

A continuación damos la solución algebraica:

De (2), $$x^2 = y + 5. \qquad (3)$$

Sustituir (3) en (1) y combinar los términos:

$$y^2 + y - 20 = 0,$$
$$y = -5, 4.$$

Sustituir $y = -5$ en (3):

$$x^2 = 0, \qquad x = 0 \qquad \text{(raíz doble)}.$$

Sustituir $y = 4$ en (3):

$$x^2 = 9, \qquad x = \pm 3.$$

Los valores se colocan en pares como sigue:

$$(x = 0, y = -5) \text{ (solución doble)}$$
$$(x = 3, y = 4), (x = -3, y = 4).$$

Notar que las curvas son tangentes en el punto que corresponde a la solución doble.

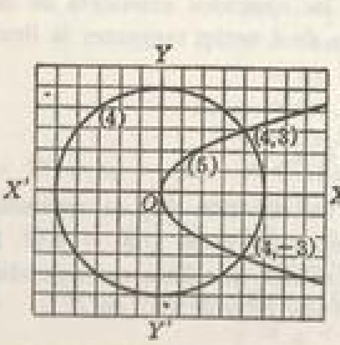
Ejemplo 2.

Dibujar y resolver:

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad (4)$$
$$4y^2 = 9x. \qquad (5)$$

Solución. La ecuación (4) es el círculo del ejemplo 1. La ecuación (5) es la de otra parábola. Ambas curvas pueden verse en la Gráf. 7.3. A continuación damos la solución algebraica.

De (5), $$y^2 = \frac{9}{4}x. \qquad (6)$$



Gráf. 7.3.

Sustituir en (4), libre de fracciones y trasponga en término constante:

$$4x^2 + 9x - 100 = 0,$$
$$x = 4, -\frac{25}{4}.$$

Sustituir $x = 4$ en (6):

$$y^2 = 9, \qquad y = \pm 3.$$

Sustituir $x = -\frac{25}{4}$ en (6):

$$y^2 = -\frac{9}{4} \cdot \frac{25}{4}, \qquad y = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} i = \pm \frac{15}{4} i.$$

Los valores se colocan en pares de la manera siguiente:

$$(x = 4, y = 3), \quad (x = 4, y = -3),$$
$$\left(x = -\frac{25}{4}, y = \frac{15}{4} i\right), \qquad \left(x = -\frac{25}{4}, y = -\frac{15}{4} i\right).$$

Los cuatro pares de valores satisfacen ambas ecuaciones, pero los dos últimos, en los cuales y es imaginario, no aparecen en la gráfica.

El tema de la representación gráfica de las ecuaciones pertenece más propiamente al campo de la geometría analítica, en la que se han perfeccionado métodos más simples y más sistemáticos, que una localización gráfica punto por punto. Por lo tanto, no seguiremos con esta discusión en estas páginas.

EJERCICIOS VII. F

Es posible que el maestro le pida al estudiante que dibuje unas gráficas para algunos de los ejercicios anteriores de este capítulo.

¿Para qué valores de k serán tangentes la línea y la curva, o las dos curvas?

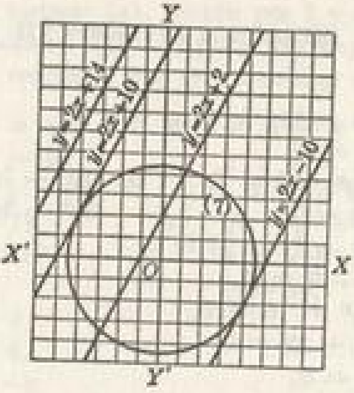
1. $x^2 + y^2 = 20,$ (7)
   $y = 2x + k.$ (8)

Solución. La ecuación (7) se representa por un círculo con centro en el origen y con radio $\sqrt{20} = 4.47$. La ecuación (8) es una serie de líneas paralelas, una línea correspondiendo a cada valor de k.

Sustituir el valor de y de (8) en (7):

$$x^2 + 4x^2 + 4kx + k^2 = 20,$$
$$5x^2 + 4kx + k^2 - 20 = 0. \qquad (9)$$

Generalmente habría dos distintas raíces de esta ecuación, x y x, que, en caso de ser reales, serían las abscisas de los puntos en donde la línea corta el círculo. Si la línea fuera tangente al círculo, estos valores de x serían las mismas, es decir, la ecuación (9) tendría raíces iguales. Haciendo uso del axioma que cuando una ecuación cuadrática tiene



GRÁF. 7.4.

raíces iguales, su discriminante, $b^2 - 4ac$, debe ser cero, encontramos que, como tangente, debemos tener

$$16k^2 - 4 \cdot 5(k^2 - 20) = 0,$$

o

$$k^2 = 100, \quad k = \pm 10.$$

Las líneas $y = 2x \pm 10$ serán, por lo tanto, tangentes al círculo (ver Gráf. 7.4).

2. $x^2 + y^2 = 17,$
   $y = 4x + k.$
3. $x^2 + y^2 = 17,$
   $y = kx + 17.$
4. $x^2 + y^2 = k,$
   $x + y = 6.$
5. $x^2 + y^2 = 25,$
   $3x - 4y = k.$
6. $y^2 = 4x,$
   $y = 2x + k.$
7. $y^2 = 6x,$
   $y = kx + 3.$
8. $y = 4x^2,$
   $y = 3x + k.$
9. $y = 6x^2,$
   $y = kx - 6.$
10. $y^2 - 8x + 2y + 17 = 0,$
    $y = 2x + k.$
11. $y^2 + 12x - 4y + 16 = 0,$
    $y = kx + 4.$
12. $x^2 + 2y^2 = 8,$
    $y = 2x + k.$
13. $9x^2 - 8y^2 = 144,$
    $y = -2x + k.$
14. $8x^2 - 3y^2 = 96,$
    $y = 2x + k.$
15. $16x^2 + 9y^2 = 144,$
    $y = x + k.$
16. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0,$
    $5x + 12y = k.$

17. $y^2 = 2px,$
$y = mx + k.$

18. $x^2 + y^2 = r^2,$
$y = mx + k.$

19. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$
$y = mx + k.$

20. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$
$y = mx + k.$

EJERCICIOS DIVERSOS VII. G

Resolver:

1. $x^2 + y^2 + 10x - 14y + 49 = 0,$
$7x - y + 17 = 0.$

2. $2x^2 + 3xy + y^2 + 2 = 0,$
$3x^2 + 2xy + 3 = 0.$

3. $3x^2 - 7y^2 + 48 = 0,$
$8x^2 - 3y^2 - 13 = 0.$

4. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 27 = 0,$
$xy - x - y - 9 = 0.$

5. $x^2 - 2xy + y^2 + 16 = 0,$
$x^2 + xy + 2y^2 + 88 = 0.$

6. $2x - 3y - 1 = 0,$
$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0.$

7. $xy - 4x - 4y + 20 = 0,$
$x^2 + y^2 - 11x - 11y + 48 = 0.$

8. $6x^2 + 55y^2 - 447 = 0,$
$9x^2 + 22y^2 - 126 = 0.$

9. $x^2 - y^2 - 6x + 5y + 3 = 0,$
$3x + 5y - 24 = 0.$

10. $5x^2 + 3xy - y^2 + 80 = 0,$
$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0.$

11. $x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 2y - 15 = 0,$
$xy - 2x - 2y - 1 = 0.$

12. $6x^2 + xy - 4y^2 - 6 = 0,$
$6x^2 - xy - 4y^2 - 4 = 0.$

13. $5x^2 - y^2 = 35,$
$3x^2 - xy - y^2 = 21.$

14. $x^2 - 3xy + y^2 - x - y - 12 = 0,$
$xy + 4x + 4y + 20 = 0.$

15. $8x^3 + 27y^3 - 37 = 0,$
$2x + 3y - 1 = 0.$

16. $27x^3 - 64y^3 - 152 = 0,$
$9x^2 + 12xy + 16y^2 - 76 = 0.$

17. $x^3 - 18xy + y^3 = 0,$
$x - xy + y = 0.$

18. $x^3 + y^3 = 4xy,$
$x + y = xy.$

19. $2x^2y^2 - 25xy + 12 = 0,$
$3x - 2y - 1 = 0.$

20. $x^3 - y^3 = 10xy,$
$x - y = xy.$

21. $x^3 - y^3 - 2 = 0,$
$x^2y - xy^2 + 2 = 0.$

22. $x^3 + y^3 = 9,$
$x^2y + xy^2 = 6.$

23. $x^4 - y^4 = 0,$
$x^2 + y^2 = 98.$

24. $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = 0,$
$x^2 + 3xy + 2y^2 = 27.$

25. $x^4 + 5x^2y^2 - 36y^4 = 0,$
$5x - 4y - 6 = 0.$

26. $4x^4 - 25x^2y^2 + 36y^4 = 0,$
$4x^2 - 2xy + y^2 - 28 = 0.$

27. $x^4 + y^4 = 32,$ (a)
$x + y = 4.$ (b)

28. $x^4 + y^4 = 2,$ (a)
$x + y = 2.$ (b)

Sugestión para la resolución de los ejercicios 27 y 28. Elevar (b) al cuarto poder y sustraer (a). Dividir por 2 y clasificar la ecuación resultante (c). Cuadrar (b), multiplicar por $2xy$ y sustraer (c). Resolver la ecuación resultante por xy y combinar con (b).

29. $3x^2 - 2y^2 - 7z^2 = 41,$
$4x^2 + 5y^2 + 8z^2 = 37,$
$5x^2 - 6y^2 + 6z^2 = -44.$

30. $x^2 + y^2 + z^2 = 14,$
$x + y + z = 4,$
$x + 2y + 3z = 9.$

31. $xy + x + y = -13,$
$yz + y + z = -17,$
$zx + z + x = 11.$

32. $x^2 + y^2 + z^2 = 21,$
$x + y + z = 3,$
$z^2 = xy.$

33. $x^2 + xy + xz = 9,$
$y^2 + yz + xy = 6,$
$z^2 + xz + yz = -6.$

Sugestión. Sumar las tres ecuaciones.

34. El perímetro de un rectángulo es de 72 pulgadas. Su superficie es de 288 pulgadas cuadradas. Dar sus dimensiones.
35. El perímetro de un triángulo recto es de 20 pulgadas. Su superficie es de 15 pulgadas cuadradas. Dar su hipotenusa.
36. Un hombre cercó un lote rectangular de terreno de 31,200 pies cuadrados de superficie con un costo de \$ 600.00. La cerca para tres lados del terreno cuesta \$ 0.75 el pie, la de la parte del frente cuesta \$ 1.00 el pie. Dar las dimensiones del terreno.
37. La superficie de una página de un libro es de 40 pulgadas cuadradas, la superficie de la parte impresa es de 21⅞ pulgadas. El margen en la parte superior y a los lados tiene ¾ de pulgada de ancho, el margen en la parte inferior tiene 1 pulgada de ancho. Dar las dimensiones de la página.
38. Un especulador vendió algunas acciones en \$ 19,800.00. Una semana más tarde, el precio de las acciones habiendo bajado en \$ 2.00 por acción, las volvió a comprar, por la misma cantidad, con 5 acciones más de las que vendió. ¿Cuántas acciones vendió en primer lugar?
39. Un grupo de pescadores alquiló una lancha por \$ 300.00. Dos miembros del grupo no pudieron tomar parte en la expedición y, por lo tanto, cada uno de los demás pescadores tuvo que pagar \$ 12.50 más. ¿Cuántos pescadores había en el grupo original?
40. Una cantidad de dinero invertida durante un año produjo un interés de \$ 81.00. Si el tipo de interés hubiera sido ¼ porciento más y el

capital $ 360.00 menos, el interés hubiera sido el mismo. Dar el capital y el tipo de interés.

41. Dos tuberías juntas pueden llenar un tanque en 6 horas. La tubería más pequeña sola necesita $3\frac{1}{2}$ horas más que la más grande para llenarlo. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de las tuberías sola para llenar el tanque?

42. Una mecanógrafa necesitaría 45 horas para escribir un determinado manuscrito. Una segunda mecanógrafa, que tardaría 2 minutos más en cada página, necesitaría 60 horas. ¿Cuántas páginas de manuscrito hay y en cuánto tiempo escribe una página cada una de las mecanógrafas?

43. Cierto día, dos inspectores, *A* y *B*, trabajando en una fábrica, estaban revisando una partida de artículos manufacturados. En la mañana, *A* había revisado 1,500 artículos, antes de que *B* empiece a trabajar. Durante el resto de la mañana inspeccionaron 4,000 artículos más, habiendo *A* trabajado 4 horas en total. En la tarde, *A* trabajó 4 horas y *B* 2 horas, y durante este tiempo revisaron 5,200 artículos. Dar el promedio de artículos revisados en una hora por cada uno de los inspectores y el número de horas que *B* trabajó en la mañana.

44. Los lados de un triángulo son 5, 6, y 8. Dar los medianos.

45. Los medianos de un triángulo son 6, 8 y 10. Dar los lados.

46. Una viga descansa en un soporte a $2\frac{1}{2}$ pies de una de sus extremidades. Un peso de 30 libras que se suspende en esta extremidad permite que la viga se equilibre. Cuando se suspende el peso en la otra extremidad de la viga, es necesario colgar un peso de 96 libras de la primera extremidad de manera a obtener el equilibrio. Dar el largo y el peso de la viga.

47. En un número de dos cifras, el cuadrado de la cifra de las decenas es de 2 inferior a la suma de las cifras. Al intercambiar las cifras, el número se aumenta en 45. ¿De qué número se trata?

48. La suma de los cuadrados de las cifras de un número de tres cifras es 84. El cuadrado de la cifra del medio es igual al producto de las otras dos. Cuando se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594. ¿Cuál es este número?

49. Si se agrega 5 al numerador y al denominador de una fracción y el resultado se añade a la fracción original, la suma es $1\frac{3}{8}$. Cuando se sustrae 5 del numerador y del denominador y este resultado se sustrae de la fracción original, lo que queda es $\frac{3}{8}$. ¿Cuál es la fracción?

50. Un señor manejó cierta distancia a velocidad uniforme. Si su velocidad hubiera sido menor en 3 millas por hora, el viaje hubiera tomado 24 minutos más. Si la velocidad hubiera sido 6 millas por hora más rápida, hubiera ahorrado un cuarto de hora. Dar la distancia y la velocidad.

51. Una lancha de motor puede bajar un río y regresar en 4 horas. Viajando a media velocidad tomaría 10 horas para hacer el mismo viaje. Dar la velocidad de la lancha a su máximo y la velocidad de la corriente.
52. Una lancha hizo un viaje de 9 millas con la marea, y de regreso en contra de la marea en 3 horas. Si la marea hubiera sido la mitad de fuerte, el viaje se hubiera hecho en 36 minutos menos. Dar la velocidad de la lancha en aguas tranquilas y la velocidad de la marea más fuerte.
53. Dos trenes empezaron sus viajes al mismo tiempo desde las ciudades *A* y *B*, respectivamente, el primero viajando de *A* hasta *B* y el segundo de *B* hasta *A*. Viajaron a velocidad uniformes, pero distintas. El primer tren alcanzó *B* 4 horas después de cruzar el otro tren y este llegó a *A* dos horas y 15 minutos después de cruzarse. Dar el tiempo requerido por cada tren para efectuar el viaje.
54. Un hombre se encuentra en un punto *A* en la ribera de un río recto. Puede remar en agua quieta a una velocidad más rápida en un 20 porciento de lo que le tomaría al ir caminando. Si rema con la corriente hasta un punto *B*, 4 millas debajo de *A* y del mismo lado del río, y después camina en una dirección perpendicular al río, hasta un punto *C*, a tres millas de *B*, le toma el mismo tiempo que si caminaría directamente desde *A* hasta *C*. Si camina de regreso desde *C* hasta *B* y, después, rema contra la corriente hasta *A*, este viaje de regreso le tomaría 1 hora y 36 minutos más. Dar su velocidad al caminar, su velocidad al remar en agua tranquila y la velocidad de la corriente del río.

CAPITULO VIII

Desigualdades

8.1. Desigualdades.

La relación "*a* es más grande que *b*" ($a > b$), siendo *a* y *b* números reales, quiere decir que $a - b$ es un número positivo. Si tenemos un eje (Gráf. 8.1) en el cual la dirección positiva

GRÁF. 8.1.

es hacia la derecha, *a* se encontrará a la derecha de *b*. En forma similar cuando se dice que "*a* es menor que *b*" ($a < b$), esto quiere decir que $a - b$ es un número negativo, y en un eje dirigido hacia la derecha, *a* se encontrará a la izquierda de *b*. Tales expresiones se llaman *desigualdades*. Todas las desigualdades se refieren a números reales.

GRÁF. 8.2.

Dos desigualdades $a > b$, $c > d$, en las cuales los signos apuntan en la misma dirección se llama *similares en sentido* (u orden); dos desigualdades $a > b$, $c < d$, en las cuales los signos apuntan en direcciones opuestas se llaman *contrarios en sentido* (u orden).

La expresión $a \geqq b$ se lee "a es más grande que o igual a *b*", la expresión $a \leqq b$ se lee "*a* es menor que o igual a *b*".

GRÁF. 8.3.

Algunas desigualdades son satisfechas por todos los números reales, por ejemplo, $x^2 + 3 > 0$. Estas desigualdades se llaman *desigualdades*

absolutas. Otras desigualdades, que se llaman condicionales, se satisfacen solamente por algunos números. Así, la desigualdad $x - 3 > 0$ se satisface solamente por números más grandes que 3.

8.2. Propiedades fundamentales.

Las propiedades siguientes son útiles al ocuparse de desigualdades. Sus comprobaciones son sencillas, derivadas inmediatamente de la definición misma de una desigualdad. La comprobación de la Propiedad I es la única que se da aquí. Las comprobaciones de las otras propiedades pueden efectuarse de la misma manera.

I. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se le suma o se le sustrae un mismo número en ambos lados. Es decir, si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.

Comprobación. Por la hipótesis $a > b$.
Que $a - b = p$, que será positivo, puesto que $a > b$. Entonces,

$$(a + c) - (b + c) = a - b = p.$$

Es decir,
$$a + c > b + c.$$

De la misma manera podemos comprobar que $a - c > b - c$.

Ejemplo 1.

$$10 > 8,$$
$$10 + 3 > 8 + 3.$$

Ejemplo 2.

$$10 > 8,$$
$$10 - 3 > 8 - 3.$$

II. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se multiplica o se divide ambos lados por el mismo número positivo.

Ejemplo 3.

$$2 < 3,$$
$$5 \cdot 2 < 5 \cdot 3.$$

Ejemplo 4.

$$3x \geqq 15,$$
$$x \geqq 5.$$

III. Una desigualdad no cambia de sentido cuando los dos lados se multiplican o se dividen por el mismo número negativo.

Ejemplo 5.

$$2 < 3,$$
$$-2 > -3.$$

(Cada lado ha sido multiplicado por -1.)

Ejemplo 6.

$$8 > 6,$$
$$8 \div (-2) < 6 \div (-2),$$
$$-4 < -3.$$

IV. Una desigualdad con las mismas cantidades positivas no cambia de sentido cuando se eleva cada lado a la misma potencia o cuando se extrae la raíz positiva de cada lado.

Ejemplo 7.

$$3 > 2,$$
$$3^2 > 2^2.$$

Ejemplo 8.

$$49 > 25,$$
$$\sqrt{49} > \sqrt{25}.$$

EJERCICIOS VIII. A

Comprobar lo siguiente:

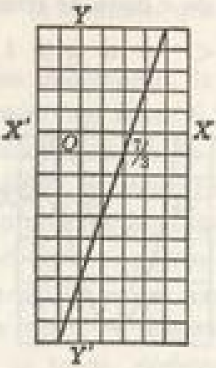
1. Si la primera de tres cantidades es mayor que la segunda, y la segunda mayor que la tercera, entonces la primera es mayor que la tercera; es decir, si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2. Cuando se agregan cantidades desiguales a otras desiguales en el mismo orden, las sumas son desiguales en el mismo orden; es decir, si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.
3. Cuando se sustraen desiguales de iguales, los resultados son desiguales en el orden opuesto; es decir, si $a > b$, entonces $c - a < c - b$. (Mostrar, por medio de un ejemplo, que si $a > b$ y $c > d$, entonces no quiere decir forzosamente que $a - c > b - d$.)
4. Cuando $a > b \geqq 0$ y $c > d \geqq 0$, entonces $ac > bd$.
5. Cuando a y b son reales, entonces $a^2 + b^2 \geqq 2|ab|$.

   SUGESTIÓN. $(a \pm b)^2 \geqq 0$.
6. Cuando a, b y c son positivos, entonces $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$.

8.3. Resolución de desigualdades.

Muchas desigualdades pueden resolverse, aplicando estas propiedades fundamentales, de la misma manera que se resuelven ecuaciones con el

empleo de axiomas relativos a igualdades. Las gráficas son frecuentemente útiles también, especialmente en el caso de desigualdades cuadráticas, para determinar cuando se satisface una desigualdad.



GRÁF. 8.4.

Ejemplo 1.

Dar los valores de x para que

$$3x - 4 > \frac{7x}{2} + 2.$$

SOLUCIÓN.

Multiplicar por 2:	$6x - 8 > 7x + 4.$
Sustraer $7x$ y agregar 8:	$-x > 12.$
Multiplicar por -1:	$x < -12.$

Ejemplo 2.

Dar una interpretación gráfica de la desigualdad $3x - 7 > 0$.

SOLUCIÓN. Que $y = 3x - 7$ y dibuje la gráfica. Se ve que la gráfica cruza el eje x entre 2 y 3. Resolviendo algebraicamente encontramos

$$3x > 7, \qquad x > \frac{7}{3}.$$

La gráfica muestra en forma visual la desigualdad.

Ejemplo 3.

Dar los valores de x para que

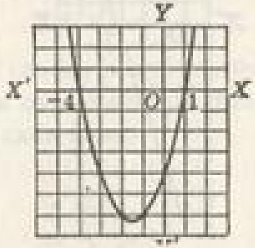
$$x^2 + 3x - 4 > 0.$$

SOLUCIÓN. Dibuje la gráfica (Gráf. 8.5.) de la función

$$y = x^2 + 3x - 4.$$

Se ve que la gráfica cruza el eje x en -4 y 1 y que la función es positiva (es decir, > 0) para valores de x fuera de estos valores, a saber.

$$x < -4 \text{ o } x > 1.$$



GRÁF. 8.5.

Algebraicamente, podemos resolver al completar el cuadrado:

$$x^2 + 3x > 4,$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} > 4 + \frac{9}{4},$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{25}{4}.$$

Esta última desigualdad tendrá sentido si

$$x + \frac{3}{2} > \frac{5}{2} \text{ o si } x + \frac{3}{2} < -\frac{5}{2};$$

es decir si

$$x > 1 \text{ o si } x < -4.$$

Una manera satisfactoria de resolver una desigualdad cuadrática consiste en reemplazar el signo de desigualdad por un signo de igualdad, resolviendo la ecuación resultante y observando la gráfica o comprobando con números, si la desigualdad se satisface entre las raíces o fuera de las raíces.

8.4. La función cuadrática general.

Considere la función cuadrática general,

$$ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

que puede escribirse también bajo la forma de

$$a(x - x_1)(x - x_2), \tag{2}$$

x_1 y x_2 siendo las raíces de la ecuación que se obtienen al establecer la función igual a cero.

Cuando estas raíces son imaginarias, la función no puede cambiar de signo. Porque recordamos (ver núm. 6.12.) que cuando una ecuación cuadrática tiene raíces imaginarias, la curva que representa la función cuadrática correspondiente se encuentra totalmente arriba o abajo del eje x (puesto que si lo cruzara la ecuación tendría una raíz real). Debe, por lo tanto, tener el signo c, puesto que cuando $x = 0$, la función es igual a c. Pero cuando las raíces son imaginarias debemos tener $b^2 - 4ac < 0$. Se necesita que a y c tengan el mismo signo, puesto que son números reales. Por lo tanto, podemos decir que en este caso $ax^2 + bx + c$ tiene el mismo signo que a y c para todos los valores de x.

Cuando las raíces son iguales ($x_1 = x_2$) podemos escribir la función bajo la forma

$$a(x - x_1)^2. \tag{3}$$

Esto será positivo siempre y cuando a sea positivo y $x \neq x_1$.

Cuando las raíces son reales y diferentes y que a es positivo, se supone que $x_1 < x_2$. Por (2) vemos que los factores $x - x_1$ y $x - x_2$ serán negativos ambos cuando $x < x_1$ y que, en consecuencia, para dichos valores de x la función será positiva. Cuando x se encuentra entre x_1 y x_2, $x - x_1$ será positivo y $x - x_2$ será negativo. La expresión (2) será entonces el producto de tres factores que tienen los signos $+, -, +,$ respectivamente y la función será negativa. Cuando $x > x_2$ todos los factores serán positivos y la función será positiva.

Cuando a es negativo la situación es invertida y la función $a(x - x_1)(x - x_2)$ será positiva solamente en el caso de que x se encuentre entre x_1 y x_2. Los resultados se concretan en la tabla que sigue:

Cuando $b^2 - 4ac$ es	Entonces $ax^2 + bx + c$ tendrán el mismo signo que a para
$-$	Todos los valores reales de x.
0	$x \neq x_1$.
$+$	$x < x_1, x > x_2$ (cuando $x_1 < x_2$).

EJERCICIOS VIII. B

Resolver las desigualdades siguientes:

1. $5x < 9.$
2. $4x - 3 < 8.$
3. $9x + 3 \geqq 2x - 4.$
4. $3x + 5 \leqq 7x - 3.$
5. $10x - 3 < 3x + 4.$
6. $8x - 9 \geqq 11x + 6.$
7. $6 - 7x \leqq 3 + 2x.$
8. $2x - 19 \geqq 5x - 1.$
9. $\dfrac{5x + 11}{2} < \dfrac{3x - 5}{4}.$
10. $\dfrac{3 - 4x}{7} > \dfrac{2 - x}{8}.$
11. $x^2 - 6x - 16 > 0.$
12. $x^2 - 9x + 20 < 0.$
13. $x^2 - 8x + 7 \leqq 0.$
14. $8 + 4x - x^2 \geqq 0.$
15. $2x^2 - 5x - 12 > 0.$
16. $6x^2 + 19x - 7 > 0.$
17. $25 - 20x - 12x^2 < 0.$
18. $x^2 + 3x + 2 > x^2 - 2x + 3.$
19. $4x^2 + 3x + 1 > 0.$
20. $2x^2 - 5x + 10 < 0.$
21. $x^2 + 2x + 7 < 3x + 4.$
22. $6x^2 + 5x - 7 > 4x^2 - 3x + 17.$
23. $x^2 + 2x - 5 > 0.$
24. $x^2 - 7x + 1 > 0.$
25. $(x + 3)(x - 2)(x - 5) > 0.$
26. $(x + 1)(x - 2)^2 > 0.$

SUGESTIÓN. El núm. 13.11. será útil para resolver los ejercicios 25 a 32.

27. $(x + 1)(x - 2)^2(x - 4)^3 \geqq 0.$
28. $x(x - 1)(x - 5) > 0.$
29. $(x + 1)^2(x^2 + 1) > 0.$
30. $x^2(x - 1)(x - 5) > 0.$
31. $(x + 1)(2x - 3)(3x + 2)^2 > 0.$
32. $(5x - 4)^2(2x + 1)^2 > 0.$
33. $\dfrac{3}{x + 2} > \dfrac{2}{x - 1}.$

SOLUCIÓN. Sustraer $2/(x - 1)$ de ambos lados:

$$\frac{3}{x + 2} - \frac{2}{x - 1} > 0.$$

Limpiar de fracciones multiplicando ambos lados por la expresión $(x + 2)^2(x - 1)^2$, que es positiva a menos que x sea igual a 1 o a -2:

$$3(x + 2)(x - 1)^2 - 2(x + 2)^2(x - 1) > 0,$$
$$(x + 2)(x - 1)[3(x - 1) - 2(x + 2)] > 0,$$
$$(x + 2)(x - 1)(x - 7) > 0.$$

Estudiando los signos de los 3 factores cuando x se encuentra en varios intervalos, vemos que la desigualdad se satisface por

$$-2 < x < 1 \quad \text{y} \quad x > 7.$$

34. $\dfrac{3}{x+3} < \dfrac{2}{x+2}$.

35. $\dfrac{5}{2x+7} > \dfrac{3}{3x-2}$.

36. $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x-4} > 0$.

37. $\dfrac{x+1}{x+2} > \dfrac{x+3}{x+4}$.

38. $\dfrac{x-1}{x+3} > \dfrac{x+5}{x-7}$

39. $\dfrac{x-2}{x-5} > \dfrac{x-5}{x+1}$.

Dar los valores de k para los cuales las raíces de las ecuaciones cuadráticas siguientes son reales y diferentes. (Se supone que k sea real.)

Sugestión. El discriminante debe ser positivo.

40. $x^2 - 2kx + k = 0$.

41. $8x^2 - 6x + 3 = k$.

42. $x^2 + k^2 - x - k = 0$.

43. $(k+2)x^2 + (x+2)k^2 = 0$.

44. $k(x+3)^2 + x(k-3)^2 = 0$.

45. $(x-k)(x-2) + (x+k)(x+3) = 0$.

Dar los valores de k para los cuales las raíces de las ecuaciones siguientes son imaginarias. (Se supone que k sea real.)

46. $kx^2 + 4x + 5 = 0$.

47. $36x^2 - 6x + 5 = kx$.

48. $x^2 + k^2 + 4x + kx + k + 4 = 0$.

49. $\dfrac{x+k}{x-2k} - \dfrac{x-2}{2x-k} = 0$.

Dar los valores de k para los cuales la línea cruza la curva en dos puntos distintos.

Sugestión. Las raíces de la ecuación cuadrática que se obtiene al sustituir la ecuación lineal a la cuadrática, deben ser reales y desiguales.

50. $x^2 + y^2 = 10$, $y = 3x + k$.

51. $x^2 + y^2 = 1$, $y = kx + 2$.

52. $x^2 + y^2 = k$, $x + y = 5$.

53. $y^2 = 12x$, $y = 3x + k$.

54. $x^2 = 12y$, $y = 3x + k$.

55. $y^2 = 12x$, $y = kx + 3$.

56. $x^2 - y^2 = 25$, $y = kx - 5$.

57. $x^2 + 6y^2 = 42$, $y = x + k$.

58. $9x^2 + 4y^2 = 36$, $y = 2x + k$.

59. $2x^2 - 5y^2 = 20$, $y = -2x + k$.

un árbol de 2 pulgadas del mismo material que dé 300 revoluciones por minuto?

Solución. Que los caballos de fuerza se indiquen por P, el número de revoluciones por minuto por n, y el diámetro por d. Entonces,

$$P = knd^3.$$

Sustituir $P = 180$, $n = 250$, $d = 3$, y resolver por k:

$$180 = k \cdot 250 \cdot 27, \qquad k = \tfrac{2}{75}.$$
$$P = \tfrac{2}{75}nd^3 = \tfrac{2}{75} \cdot 300 \cdot 8 = 64.$$

Es decir que un árbol de 2 pulgadas que da 300 revoluciones por minuto puede transmitir 64 caballos de fuerza sin peligro alguno.

3. Si y varía como x y es igual a 24 cuando x es igual a 15, ¿cuál es el valor de y cuando x es igual a 10?, ¿a $3\frac{1}{3}$?, ¿a $6\frac{1}{4}$?
4. Si y varía como x y es igual a $\frac{2}{3}$ cuando x es igual a $\frac{3}{4}$, ¿cuál es el valor de y cuando x es igual a $\frac{15}{16}$, a $\frac{1}{2}$, a 27?
5. Si y varía como el cuadrado de x y es igual a 2 cuando x es igual a 6, ¿cuál es el valor de y cuando x es igual a 9, a 4, a $4\frac{1}{2}$?
6. Cuando y varía como la raíz cuadrada de x y es igual a 10 cuando x es igual a 6, ¿cuál es el valor de y cuando x es igual a 216?
7. La cantidad z varía conjuntamente con x e y, y tiene el valor 15 cuando x es igual a 6 y que y es igual a 10. (a) Dar el valor de z cuando x es igual a 8 e y es igual a 2. (b) Dar el valor de y cuando x es igual a 12 y z igual a $\frac{3}{2}$.
8. Si z varía a la inversa de x y tiene el valor $\frac{3}{5}$ cuando x es igual a 10, ¿cuál es el valor de y cuando x es igual a $\frac{5}{6}$?
9. Si z varía directamente como x y a la inversa de y y es igual a 4 cuando x e y tienen los valores 12 y 8 respectivamente, ¿cuál es el valor de z cuando x es igual a $\frac{5}{7}$ e y es igual a $\frac{5}{18}$?
10. La cantidad z varía directamente como el cubo de x y a la inversa del cuadrado de y; z tiene el valor 14 cuando x es igual a 4 e y es igual a 6. Dar el valor de z cuando x es igual a 2 e y es igual a 3.
11. La Ley de Hooke indica que la extensión de un resorte o de una cinta elástica más allá de su largo natural varía de acuerdo con la fuerza que se aplica. Si un peso de 9 libras se ámarra a un resorte y lo hace extenderse de un largo de 15 pulgadas hasta $16\frac{1}{2}$ pulgadas, ¿qué peso será necesario para extender el resorte hasta un largo de 20 pulgadas?
12. El periodo de un péndulo simple (el tiempo que necesita para balancearse a un lado y regresar) varía como la raíz cuadrada de su largo. (a) Si un un péndulo de 8 pulgadas de largo tiene un periodo de 0.45 segundo, ¿cuál es el periodo de un péndulo de 32 pulgadas de largo? (b) ¿Cuál es el largo de un péndulo con un periodo de 1 segundo?

13. La Ley de Boyle indica que, con una temperatura constante, la presión de un gas varía a la inversa de su volumen. Si una cierta cantidad de gas se encuentra bajo una presión de 20 libras por pulgada cuadrada y tiene un volumen de 250 pulgadas cúbicas, ¿cuál sería la presión en caso de reducir el volumen a (a) 200 pulgadas cúbicas? (b) ¿150 pulgadas cúbicas? (c) ¿Cuál sería la presión si el volumen se aumenta a 400 pulgadas cúbicas?
14. Si un árbol de 2.5 pulgadas da 240 revoluciones por minuto puede transmitir 200 caballos de fuerza, ¿cuál es el número máximo de revoluciones por minuto que sin riesgo puede transmitir 100 caballos de fuerza un árbol de 1.5 pulgadas? (Ver ejercicio 2.)
15. La cantidad de corriente eléctrica que se necesita para derretir un alambre de fusible varía como la potencia $\frac{3}{2}$ del diámetro. Si la corriente necesitada para derretir un alambre de un diámetro de 0.02 pulgada es de 15 amperes, ¿qué corriente se ha de necesitar para derretir un alambre del mismo material con un diámetro de 0.08 pulgadas?
16. La resistencia eléctrica de un alambre varía directamente de acuerdo con su extensión e inversamente como el cuadrado de su diámetro. Si un alambre tiene 50 pies de largo y 0.015 pulgadas de diámetro tiene una resistencia de 3.5 ohmios, ¿cuál es la resistencia de un alambre del mismo material que tenga 75 pies de largo y 0.025 de pulgada de diámetro?
17. La fuerza de un viento que sopla perpendicularmente sobre una superficie plana varía de acuerdo con la superficie y el cuadrado de la velocidad del viento. Cuando el viento sopla a 15 millas por hora la fuerza sobre una superficie A es de 24 libras. ¿Cuál sería la fuerza sobre una superficie $2A$ con viento soplando a razón de 20 millas por hora?
18. La fuerza requerida para mover un barco varía como el cubo de la velocidad. Si una velocidad de 10 nudos requiere 5,600 caballos de fuerza. ¿Cuál sería la fuerza necesaria para una velocidad de 15 nudos?
19. La fuerza necesaria para mover un ventilador varía como el cubo de la velocidad. Si $\frac{1}{2}$ caballo de fuerza moverá el ventilador a una velocidad de 100 revoluciones por minuto, (a) ¿a qué velocidad lo moverían 4 caballos de fuerza? (b) ¿Qué fuerza se necesita para darle una velocidad de 120 revoluciones por minuto?
20. Si un peso levanta otro por medio de una cuerda que pasa por una polea fija, la distancia que recorre cada peso en un periodo de tiempo dado varía directamente como la diferencia entre los pesos e inversamente como su suma. Si un peso de 5 libras levanta un peso de 3 libras en una distancia de 16 pies en 2 segundos, ¿hasta qué altura levantará un peso de 6 libras a otro de 2 libras en el mismo periodo de tiempo?

21. El peso de un objeto arriba de la superficie de la tierra varía inversamente como el cuadrado de su distancia desde el centro de la tierra. Si fuera posible mandar un objeto que pese 9 libras en la superficie de la tierra hasta un punto a 2,000 millas arriba de la misma, ¿cuál sería su peso a esta altura? (Tomando como radio de la Tierra la distancia de 4,000 millas.)
22. ¿A qué altura arriba de la superficie de la Tierra podría un objeto tener un peso igual a la cuarta parte de su peso en la superficie de la Tierra? (Ver ejercicio anterior.)
23. El peso de un objeto debajo de la superficie de la tierra varía de acuerdo con su distancia desde el centro de la tierra. ¿Cuánto pesaría un objeto en un punto a la cuarta parte de la distancia desde la superficie hasta el centro?
24. La carga crítica de una columna cilíndrica varía directamente como la cuarta potencia de su diámetro e inversamente como el cuadrado de su altura. ¿Cuál sería el efecto sobre la carga crítica en caso de duplicar tanto el diámetro como la altura de la columna?
25. La carga admisible en una viga soportada en ambas extremidades varía directamente como su ancho y el cuadrado de la altura de la viga e inversamente en cuanto a la distancia entre soportes. Si la carga admisible para una viga de 4×6 pulgadas con soportes a 12 pies de distancia entre sí es de 1,000 libras, ¿cuál es la carga posible para una viga de 3×10 pulgadas del mismo material, con soportes a 8 pies de distancia uno del otro?
26. La cantidad de agua que se descarga por un escape en un periodo dado de tiempo varía de acuerdo con lo largo del escape y la potencia $\frac{3}{2}$ de la cabecera. (La cabecera es la diferencia en altura entre el nivel de la cresta de agua que corre por encima del escape y el nivel del agua inmóvil arriba del escape.) Si el promedio de descarga por un escape de 4 pies de largo y con una cabecera de 3 pulgadas es de 100 pies cúbicos por minuto, ¿cuál es el promedio de descarga por un escape de 10 pies de largo y con una cabecera de 1 pie?
27. El número de vibraciones producidas por un alambre estirado varía directamente como la raíz cuadrada de la fuerza de estiramiento, o tensión, e inversamente como el producto del largo y del diámetro. Si un alambre de 2 pies de largo y de 0.025 pulgada de diámetro vibra a razón de 1,440 veces por segundo bajo una tensión de 40 libras, (a) ¿cuántas vibraciones se producirán por un alambre de 3 pies de largo y de 0.03 pulgada de diámetro bajo una tensión de 90 libras? (b) ¿A qué tensión debe sujetarse un alambre de 1 pie y 3 pulgadas de largo y de 0.10 pulgada de diámetro para que vibre 720 veces por segundo?
28. La intensidad de iluminación desde una fuente de luz varía inversamente como el cuadrado de la distancia desde la fuente. (a) ¿A qué

distancia desde una fuente de luz será la intensidad de iluminación la mitad de potente que lo es a una distancia de 6 pulgadas? (b) ¿Hasta qué punto debe acercarse un objeto a la fuente de luz de manera que la intensidad de iluminación que reciba sea 44 porciento más de la que recibe a una distancia de 3 pies?

29. Un pedazo de cartón se coloca a media distancia entre dos fuentes de luz de igual intensidad, distantes entre sí de 12 pies. Su plano es perpendicular a la línea que une las dos fuentes. ¿Hasta qué distancia deberá moverse, siempre en esta línea y perpendicular a ella, para que la iluminación total que reciba (en ambos lados) sea 10 veces más potente?

CAPITULO X

Inducción matemática y fórmula del binomio

10.1. Inducción matemática.

El proceso llamado *inducción matemática* es un sistema de razonamiento sumamente importante. Es sumamente útil para efectuar ciertas comprobaciones, especialmente para establecer la validez de ciertos tipos de fórmulas. Ilustraremos este método comprobando que la suma de los primeros n integrantes impares es igual a n^2, es decir,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

La comprobación consiste de dos partes:

Parte I La fórmula es válida para ciertos valores particulares de n, por ejemplo,

$$\begin{array}{llll} \text{para } n = 1, & 1 = 1^2, & \text{o} & 1 = 1; \\ \text{para } n = 2, & 1 + 3 = 2^2, & \text{o} & 4 = 4; \\ \text{para } n = 3, & 1 + 3 + 5 = 3^2, & \text{o} & 9 = 9. \end{array}$$

Parte II. Dejemos que k indique cualquier integrante positivo para el cual la fórmula tiene validez, es decir como

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2. \qquad (2)$$

(Hasta ahora, en este ejemplo, vemos que k podría ser 1, 2 o 3.) Entonces podemos demostrar que la fórmula tiene validez para el valor siguiente integral de n. es decir, $k + 1$.

El último integrante impar que aparece a la izquierda en (2) es $2k - 1$. El siguiente integrante impar es $(2k - 1) + 2 = 2k + 1$. Sumando esto a ambos lados de (2), obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2. \qquad (3) \end{aligned}$$

Puesto que (2) es una verdadera ecuación y que hemos añadido iguales a iguales, (3) debe ser la fórmula correcta para la suma del primero $k + 1$ integrantes impares. Sin embargo, cuando sustituimos $k + 1$ por n en (1), obtenemos también (3). Es decir que, si (1) tiene validez cuando $n = k$, entonces tiene también validez para $n = k + 1$. Pero la fórmula es verdad para $n = 1, 2, 3$. Si dejamos que $k = 3$, de acuerdo con la Parte II de la fórmula debe ser válido por $n = k + 1 = 4$. Entonces, si dejamos que $k = 4$, se entiende que la fórmula debe ser válida para $n = k + 1 = 5$, etc..., para cualquier integrante positivo, sea cual sea.

En general, una comprobación por inducción matemática consiste de dos partes:

Parte I. Una verificación de que la propuesta o fórmula es verdad para el menor valor integral de n para el cual se sostiene.

Parte II. Una comprobación de que si es verdad para cualquier valor integral de n, por ejemplo $n = k$, entonces es verdad también para el valor siguiente, $n = k + 1$.

La fórmula, por lo tanto, tendrá validez para todos los valores de n desde el valor verificado en adelante.

Las dos partes de la comprobación no tienen que hacerse en el orden en el cual se han dado, puesto que son completamente independientes una de otra. Ambas partes, sin embargo, son absolutamente necesarias para la comprobación, como se demuestra en las ilustraciones siguientes:

Considere la fórmula

$$1 + 3 + 5 + \cdot \cdot \cdot + (2n - 1) = n^3 - 5n^2 + 11n - 6.$$

Tenemos

Para $n = 1$,

$$1 = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6, \quad \text{o} \quad 1 = 1;$$

para $n = 2$,

$$1 + 3 = 2^3 - 5 \cdot 2 + 11 \cdot 2 - 6, \quad \text{o} \quad 4 + 4;$$

para $n = 3$,

$$1 + 3 + 5 = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6, \quad \text{o} \quad 9 = 9.$$

Así, podemos tener la tentación de asumir que la fórmula es válida para todos los integrantes positivos de n. Sin embargo, la Parte II de la comprobación por inducción matemática es imposible de demostrar;

la fórmula no es válida para otros valores de n, que no sean 1, 2, 3. Cuando sustituimos $n = 4$, por ejemplo llegamos al resultado contradictorio $16 = 22$.

Similarmente, la fórmula

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 + (n-1)(n-2)\cdots(n-100)$$

tiene validez para todos los valores integrales y positivos de n hasta e incluyendo 100, pero falla para $n = 101$.

Por otro lado, consideremos la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1.$$

Suponemos que es válida para $n = k$. Entonces

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1) + 1.$$

Agregamos $k + 1$ a cada lado:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + 1 + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + 1.$$

Así, la fórmula tiene validez para $n = k + 1$ *cuando tiene validez para* $n = k$, y la Parte II de la comprobación se ha demostrado. Sin embargo, la Parte I no puede ser comprobada, puesto que no se puede encontrar un valor para n con el cual la "fórmula" pueda tener validez.

EJERCICIOS X. A

Comprobar por inducción matemática:

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.
4. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$
$= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$.
5. $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5$
$= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$.
6. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
7. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.
8. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.

9. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$.
10. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$
$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
11. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1) \cdot 2n$
$= \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$.
12. $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1)$
$= \frac{1}{3}n(4n^2 + 6n - 1)$.
13. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + n(n+1)^2$
$= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.
14. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$
$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.
15. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)2n(2n+1)$
$= n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)$.
16. $1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + n \cdot 1$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.
17. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.
18. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.
19. $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$.
20. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
21. $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.
22. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$.
23. $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2 - \dfrac{1}{n}$ por $n > 1$.
24. La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)$ 180 grados.
25. El número de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{1}{2}n(n-3)$.
26. $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$.

SUGESTIÓN. $x^n - y^n = x(x^{n-1} - y^{n-1}) + y^{n-1}(x - x)$.

Comprobar o refutar que las fórmulas siguientes son generales:

27. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2)$
$= \frac{1}{2}(n^3 + n^2 + 6n - 2)$.
28. $1 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + 9 \cdot 13 + \cdots + (4n-3)(4n+1)$
$= \frac{1}{3}n(16n^2 + 12n - 13)$.
29. $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$
$= \dfrac{n}{4n+1}$.

30. $1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \cdots + (3n - 2)(3n + 1)$
$= 4n^3 - 3n^2 + 9n - 6.$

31. $1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + n^2(n + 1)$
$= \frac{1}{6}(n^4 + 11n^3 - 12n + 8).$

32. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \frac{10}{n}.$

33. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n^2}.$

34. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{n}{n + 1}.$

35. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{n}.$

10.2. La fórmula del binomio.

Por el método de multiplicación de los polinomios encontramos que:

$$(a + b)^1 = a + b,$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Si n representa el exponente del binomio $a + b$ en cualquiera de las expansiones anteriores,* vemos que

I. El primer término es a^n.
II. El segundo término es $na^{n-1}b$.
III. Los exponentes de a se reducen en 1 de término a término; los exponentes de b aumentan en 1 de término a término.
IV. Si en cualquier término se multiplica el coeficiente por el exponente de a y se divide por el número del término, el resultado es el coeficiente del término siguiente.

Por lo tanto escribimos

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n. \quad (1)$$

Esta es la *fórmula binomial*. Su validez para el caso en el cual n es un integrante positivo se comprobará en el núm. 10.5.

* Se supone, de momento, que n es un integrante positivo.

Otras propiedades notables de la expansión son:

V. La suma de los exponentes de a y b es n.

VI. Hay $n + 1$ términos.

VII. Los coeficientes son simétricos (es decir que el coeficiente del tercer término al principio es el mismo que el del tercer término desde el final).

EJERCICIOS X. B

Asumiendo que la fórmula binomial tiene validez, dar la expansión de lo siguiente:

1. $(x + y)^5$.
2. $(x - y)^6$.
3. $(a + b)^6$.
4. $(1 + x)^7$.
5. $(x + 1)^8$.
6. $(1 - x)^8$.
7. $(a + b)^9$.
8. $(a - b)^9$.
9. $(1 - x)^{10}$.

Extender y simplificar:

10. $(2x^3 - \frac{1}{3}y)^4$.

Solución.

$$\begin{aligned}(2x^3 - \tfrac{1}{3}y)^4 &= (2x^3)^4 + 4(2x^3)^3(-\tfrac{1}{3}y) + 6(2x^3)^2(-\tfrac{1}{3}y)^2 \\ &\quad + 4(2x^3)(-\tfrac{1}{3}y)^3 + (-\tfrac{1}{3}y)^4 \\ &= 16x^{12} - \tfrac{32}{3}x^9y + \tfrac{8}{3}x^6y^2 - \tfrac{8}{27}x^3y^3 + \tfrac{1}{81}y^4.\end{aligned}$$

Nota. En problemas de este tipo no trate de simplificar antes de completar la expansión. Al simplificar, divida siempre factores comunes al numerador y al denominador.

11. $(3x + 4y)^5$.
12. $(3a^2 - 5b)^3$.
13. $(2x^2 + y^{1/2})^4$.
14. $(\frac{1}{2}x^2 - 2y^3)^5$.
15. $(\frac{1}{2}a^{1/2} + \frac{1}{3}b^{1/3})^6$.
16. $(0.3a^3 + 0.2b^2)^6$.
17. $(a^2b - 2c^3)^7$.
18. $(2a^2 + \frac{1}{2}b^{1/2})^5$.
19. $(10x - 2y)^9$.

Encontrar los cuatro primeros términos de las expansiones siguientes:

20. $(a + b)^{20}$.
21. $(x + y)^{50}$.
22. $(1 + x)^{100}$.
23. Extender $(x + y + z)^3$.

Sugestión. Considerar en primer lugar a $(x + y)$ como una cantidad única.

24. Dar, con la ayuda de la fórmula binomial, el valor de $(0.98)^4$.

Sugestión. $0.98 = 1 - 0.02$.

Dar, con la ayuda de la fórmula binomial, el valor de

25. $(2.2)^4$.
26. $(1.3)^5$.
27. $(0.97)^4$.
28. $(1.04)^5$.
29. $(99)^5$.
30. $(105)^4$.
31. $(1.004)^5$.
32. $(0.998)^5$.
33. $(1003)^4$.

Dar, con la ayuda de la fórmula binomial, los valores de

34. $(1.1)^{16}$ correcto hasta tres lugares decimales.
35. $(1.02)^{20}$ correcto hasta cuatro lugares decimales.
36. $(1.03)^{25}$ correcto hasta tres lugares decimales.
37. $(0.99)^{10}$ correcto hasta cuatro lugares decimales.
38. $(0.998)^{25}$ correcto hasta cinco lugares decimales.

10.3. El triángulo de Pascal.

Los coeficientes de la fórmula binomial pueden obtenerse por medio de un sistema inteligente conocido como el *Triángulo de Pascal*, ilustrado a continuación. Este triángulo de números, ladeado por 1 (unos), puede formarse sumando dos números adyacentes en determinada hilera, para obtener el número entre ellos en la hilera inmediatamente inferior. El número 1 en el vértice del triángulo puede imaginarse como la expansión de $(a+b)^0 = 1$, la segunda hilera da los coeficientes de $(a+b)^1$, la tercera hilera da los coeficientes de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, etc. . .

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}
$$

10.4. El término general de la fórmula binomial.

Cuando examinamos (1) del núm. 10.2, podemos observar que el término de la fórmula binomial involucrando b^r es

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots \text{a } r \text{ factores}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\, a^{n-r}b^r, \tag{1}$$

que puede también escribirse

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r\,!}\, a^{n-r}b^r, \tag{2}$$

donde el símbolo $r\,!$, llamado r factorial, se define, con r como integrante positivo, como

$$r\,! = r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \qquad (3)$$

Por ejemplo, $\quad 4\,! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$

En realidad, el término involucrando b^r es el término número $r+1$, puesto que b aparece en el segundo término, b^2 en el tercero, b^3 en el cuarto, etc... El r término es

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots \text{a } r-1 \text{ factores}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)}\, a^{n-r+1}b^{r-1} \qquad (4)$$

Cualquier término número $r+1$ (fórmula (1) o (2)) o término número r (4) puede llamarse el *término general* de la expansión de $(a+b)^n$.

EJERCICIOS X. C

1. Dar el 4º término de $(2x - \frac{1}{4}y)^{10}$.

Solución. El 4º término involucrará la 3ª potencia de $-\frac{1}{4}y$; es

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\,(2x)^7\left(-\tfrac{1}{4}y\right)^3 = -240x^7y^3.$$

Encontrar:

2. El 5º término de $(x+y)^{18}$.
3. El 7º término de $(3x-2y)^{10}$.
4. El 6º término de $(2x^2-5y^3)^{15}$.
5. El 8º término de $(3a^{1/2}+2b^{1/3})^{12}$.
6. El 6º término de $(1+x)^{100}$.
7. El término medio de $(6x-7y)^{10}$.
8. El término medio de $(2a^2+\frac{1}{2}b^3)^{18}$.
9. El término involucrando b^5 en $(a+b)^{15}$.
10. El término involucrando a^5 en $(a-b)^{15}$.
11. El término involucrado y^{10} en $(2x^3-3y^2)^{12}$.
12. El término involucrando x^2 en $(5x^3+2y^2)^9$.
13. El término involucrando x^5y^3 en $(x-y+z)^{11}$.
14. El término involucrando a^2b^5 en $(a-b+c)^{10}$.
15. El término involucrando y^4z^{12} en $(x+y-z)^{18}$.
16. El término medio en la expansión de $(a^3+2b^2)^n$ es $Ca^{18}b^{12}$. Dar C y n.

términos a la derecha, nos aproximamos más y más al valor de la izquierda (ver Capítulo XX).

Ejemplo 1.

(a) Dar los primeros cuatro términos de (1) cuando $n = -2$. (b) Sustituir $x = \frac{1}{4}$ y valorizar.

Solución.

(a) $$(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + \frac{-2(-3)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{-2(-3)(-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$
$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

(b) $$1 - 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \frac{1}{64} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

El valor verdadero es $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2} = \frac{16}{25} = 0.64.$

Ejemplo 2.

Dar la raíz cuadrada de 1.2 empleando los tres primeros términos de la expansión binomial.

Solución.

$$\sqrt{1.2} = (1 + 0.2)^{1/2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(0.2) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2}(0.2)^2 + \cdots$$
$$= 1 + 0.1 - 0.005 + \cdots$$
$$= 1.095.$$

que está correcto hasta tres decimales.

No es difícil demostrar que cualquier binomio $(a + b)^n$, en el cual $a \neq b$, puede extenderse. Supongamos, para puntualizar, que a es numéricamente más grande que b. Entonces

$$(a + b)^n = \left[a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$$

donde b/a es numéricamente menos que 1. El último binomio puede extenderse por medio de (1).

Ejemplo 3.

Dar la raíz cuadrada de 23 usando la fórmula binomial.

Solución.

$$\sqrt{23} = (25 - 2)^{1/2} = \left[25\left(1 - \frac{2}{25}\right)\right]^{1/2} = 5(1 - 0.08)^{1/2}$$

$$= 5\left[1 + \frac{1}{2}(-0.08) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2}(-0.08)^2 + \cdots\right]$$

$$= 5(1 - 0.04 - 0.0008 + \cdots) = 5(0.9592) = 4.796,$$

que es correcto hasta la tercera decimal.

EJERCICIOS X. D

Dar los cuatro primeros términos en la expansión de

1. $(1 + x)^{-1}$.	2. $(1 - x)^{-2}$.	3. $(1 + x)^{1/2}$.
4. $(1 + x)^{1/3}$.	5. $(1 + x)^{2/3}$.	6. $(1 + x)^{1/4}$.
7. $(1 + x)^{-½}$.	8. $(1 - x)^{-1/3}$.	9. $(1 + x)^{1/5}$.
10. $(1 + x)^{1/6}$.	11. $(1 + 2x)^{-1/2}$.	12. $(1 + x)^{-1}$.
13. $(1 - 3x)^{0.3}$.	14. $(1 + x)^{-0.7}$.	15. $(1 - 2x^2)^{-0.1}$.

Dar aproximaciones a la raíces cuadradas de los números siguientes empleando tres términos de las series binomiales:

16. 1.06.	17. 1.03.	18. 0.98.
19. 105.	20. 96.	21. 28.
22. 11.	23. 5.	24. 37.
25. 61.	26. 47.	27. 82.

Dar aproximaciones a las raíces cúbicas de los números siguientes empleando tres términos de las series binomiales:

28. 1.09.	29. 0.98.	30. 1006.
31. 998.	32. 7.	33. 11.
34. 25.	35. 65.	36. 30.

Dar aproximaciones a las raíces de los números siguientes empleando tres términos de las series binomiales:

37. 1.04.	38. 30.	39. 3000.

CAPITULO XI

Progresiones

11.1. Progresión aritmética.

Una progresión aritmética es una serie de cantidades, que se llaman *términos,* cada una de las cuales (después de la primera) puede obtenerse de la anterior agregándole una cantidad fija llamada *diferencia común.* Así, la serie de números 2, 5, 8, 11, por ejemplo, es una progresión aritmética. En este caso la diferencia común es $5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 3$.

11.2. El n° término de una progresión aritmética.

Ilustramos la progresión aritmética por

$$a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n.$$

Si la diferencia común se representa por d, tenemos, por definición,

$$a_2 = a + d, \qquad a_3 = a + 2d, \qquad a_4 = a_1 + 3d, \cdots,$$

y, en general, para el n° término,

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d. \tag{1}$$

Ejemplo.

Dar el 10° término de la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, · · ·

SOLUCIÓN. $a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 2 + 27 = 29.$

11.3. La suma de una progresión aritmética.

Indicaremos la suma de n términos de una progresión aritmética por S_n. Para lograr una fórmula para la suma, la escribiremos en primer lugar en orden natural y, después, en orden inversa:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n - 2)d] + [a_1 + (n - 1)d],$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n - 2)d] + [a_n - (n - 1)d].$$

Sumando, obtenemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

(puesto que hay n términos). Por lo tanto,

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{1}$$

Cuando sustituimos en (1) $a_n = a_1 + (n - 1)d$, que obtuvimos por la ecuación (1) de la sección anterior, obtenemos ahora una nueva expresión útil para la suma, a saber,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]. \tag{2}$$

Ejemplo 1.

Dar la suma de 10 términos de la progresión aritmética 2, 5, 8, $\cdots$

SOLUCIÓN. Sustituir $a_{10} = 29$ (que vimos antes) en (1):

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 + 29) = 155.$$

Ejemplo 2.

Dar la suma de 9 términos de la progresión aritmética 25, 21, 17, $\cdots$

SOLUCIÓN. $a_1 = 25$, $d = -4$, $n = 9$. Sustituir en (2):

$$S_9 = \frac{9}{2}[2 \quad 25 + 8(-4)] = 81.$$

11.4. Medianos aritméticos.

Los términos entre dos términos dados de una progresión aritmética se llaman *medianos aritméticos* entre los términos.

Ejemplo.

Insertar 3 medianos aritméticos entre 7 y 13.

SOLUCIÓN. $a_1 = 7$, $a_5 = 13$ ($n = 5$, puesto que la progresión se compone de 3 medianos más el primero y el último término). Sustituir en la fórmula (1) del núm. 11.2:

$$13 = 7 + 4d, \qquad d = 1\tfrac{1}{2}.$$

La progresión es 7, $8\tfrac{1}{2}$, 10, $11\tfrac{1}{2}$, 13.

EJERCICIOS XI. A

Dar a_n y S_n para las progesiones siguientes:

1. $2, 7, 12, \cdots (n = 10)$.
2. $37, 33, 29, \cdots (n = 10)$.
3. $3, 24, 45, \cdots (n = 20)$.
4. $2\frac{1}{3}, 4, 5\frac{2}{3}, \cdots (n = 12)$.
5. $13, 9, 5, \cdots (n = 15)$.
6. $3, 11, 19, \cdots (n = 150)$.
7. $0.6, 1.7, 2.8, \cdots (n = 100)$.
8. $5, 12, 19, \cdots (n = 250)$.
9. $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \cdots (n = 11)$.
10. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \cdots (n = 21)$.
11. Suponiendo $a_1 = 5$, $d = 3\frac{1}{2}$, $a_n = 54$; dar n y Sn.
12. Suponiendo $a_1 = \frac{4}{5}$, $d = \frac{4}{5}$, $a_n = \frac{16}{5}$; dar n y Sn.
13. Suponiendo $a_1 = 7$, $a_{12} = 35$; dar d y S_n.
14. Insertar seis medianos aritméticos entre 7 y 12.
15. Insertar once medianos aritméticos entre 3 y 30.
16. Suponiendo $a_{12} = 37$, $d = 3$; dar a_1 y S_{12}.
17. Suponiendo $a_{65} = 100$, $d = \frac{3}{8}$; dar a_1 y S_{65}.
18. Suponiendo $a_1 = 15$, $S_{10} = 120$; dar d y a_{10}.
19. Suponiendo $a_1 = 120$, $S_7 = 210$; dar d y a_7.
20. Suponiendo $a_{13} = 25$, $S_{13} = 39$; dar a_1 y d.
21. Suponiendo $d - 5$, $S_9 = 75$; dar a_1 y a_9.
22. Suponiendo $d = 1\frac{1}{3}$, $S_{10} = 175$; dar a_1 y a_{10}.
23. Suponiendo $a_1 = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$; dar n y a_n.
24. Suponiendo $a_1 = 174$, $d = -6$, $S_n = 1794$; dar n y a_n.
25. Suponiendo $a_1 = 20$, $d = -1\frac{1}{2}$, $S_n = 108\frac{1}{2}$; dar n y a_n.
26. Suponiendo $a_1 = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$; dar n y d.
27. Suponiendo $a_1 = 9$, $a_n = 37$, $S_n = 207$; dar n y d.
28. Suponiendo $a_n = 200$, $d = 4\frac{1}{2}$, $S_n = 1952\frac{1}{2}$; dar n y a_1.
29. Suponiendo $a_5 = 17$, $a_{12} = 122$; dar a_8.
30. Suponiendo $a_{19} = 125$, $a_{30} = 169$; dar a_{25}.
31. Suponiendo $a_9 = 25$, $S_9 = 153$; dar a_{12}.
32. Determinar x de manera que $x + 2$, $2x$, $4x - 7$ formen una progresión aritmética.
33. Determinar x de manera que $4x$, $5x + 4$, $3x^2 - 1$, formen una progresión aritmética.
34. Derivar una fórmula para la suma de las primeras n integrantes.
35. Derivar una fórmula para la suma de los primeros n integrantes pares.
36. Derivar una fórmula para la suma de los primeros n integrantes nones.
37. Derivar fórmulas para: a_1 y S_n en términos de d, n, a_n.
38. d y a_n en términos de a_1, n, S_n.
39. a_1 y d en términos de n, a_n, S_n.
40. a_1 y a_n en términos de d, n, S_n.
41. d y n en términos de a_1, a_n, S_n.
42. n y S_n en términos de a_1, d, a_n.
43. d en términos de a_1, n, a_n.
44. Comprobar la fórmula (2) del núm. 11.3. por inducción matemática.

11.5. Progresión geométrica.

Una *progresión geométrica* es una serie de cantidades, llamadas *términos*, cada uno de los cuales (después de la primera) puede obtenerse de la anterior multiplicándola por una cantidad fija llamada *proporción común*. Las cantidades 2, 6, 18, 54, por ejemplo, forman una progresión geométrica. En este caso, la proporción común es $6/2 = 18/6 = 54/18 = 3$.

11.6. El nº término de una progresión geométrica.

Cuando la progresión geométrica es

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n,$$

y la proporción común es r, se deduce por definición que

$$a_2 = a_1r, \qquad a_3 = a_1r^2, \qquad a_4 = a_1r^3, \cdots,$$

y, en general,

$$a_n = a_1r^{n-1}. \tag{1}$$

Ejemplo.

Dar el 5º término de la progresión geométrica 2, 6, 18, $\cdots$.

Solución. La proporción es $6/2$ o $18/6 = 3$. Por lo tanto,

$$a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

11.7. La suma de una progresión geométrica.

Para sacar la suma de n términos de una progresión geométrica por S_n, escribimos

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}. \tag{1}$$

Multiplicamos por r:

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + a_1r^n. \tag{2}$$

Sustraemos (1) de (2):

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1,$$
$$(r-1)S_n = a_1(r^n - 1).$$

A condición de que $r \neq 1$,

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}. \tag{3}$$

Si r es numéricamente inferior a 1, es conveniente escribir (3) en la forma

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \tag{4}$$

EJERCICIO

Demostrar que

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r} \tag{5}$$

Ejemplo.

Dar la suma de 5 términos de la progresión geométrica 2, 6, 18, $\cdots$

Solución. Por (3),

$$S_5 = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 242.$$

11.8. Medianos geométricos.

Los términos entre cualesquiera de dos términos dados de una progresión geométrica se llaman *medianos geométricos* entre los términos dados.

Ejemplo.

Insertar 3 medianos geométricos entre 16 y 81.

Solución. $a_1 = 16$, $a_5 = 81$. Sustituir en la fórmula $a_n = a_1r^{n-1}$:

$$81 = 16r^4, \quad r^4 = \frac{81}{16}, \quad r = \pm \frac{3}{2}.$$

($r = \pm \frac{3}{2}i$, también, pero se considerarán solamente valores reales). Hay dos progresiones:

16, 24, 36, 54, 81; 16, −24, 36, −54, 81.

EJERCICIOS XI. B

Dar a_n y S_n para las progresiones siguientes:

1. 2, 10, 50, $\cdots$ ($n = 6$).
2. 2, 6, 18, $\cdots$ ($n = 8$).
3. 4, −12, 36, $\cdots$ ($n = 7$).
4. 16, 24, 36, $\cdots$ ($n = 9$).
5. 768, 384, 192, $\cdots$ ($n = 10$).
6. −54, 36, −24, $\cdots$ ($n = 6$).
7. $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $\cdots$ ($n = 5$).
8. 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\cdots$ ($n = 6$).

9. 3, 0.3, 0.03, $\cdots$ ($n = 11$).
10. 3, -0.3, 0.03, $\cdots$ ($n = 11$).
11. 1, 1.02, $(1.02)^2$, $\cdots$ ($n = 5$).
12. 2, $2\sqrt{5}$, 10, $\cdots$ ($n = 12$).
13. $3\sqrt{2}$, -6, $6\sqrt{2}$, $\cdots$ ($n = 12$).
14. $6 - 3\sqrt{3}$, 3, $6 + 3\sqrt{3}$, $\cdots$ ($n = 6$).
15. Dados $a_1 = 27$, $r = 1\frac{2}{3}$, $a_n = 208\frac{1}{3}$; encontrar n y S_n.

NOTA. Considerar solamente valores reales en los ejercicios siguientes.

16. Considerando $a_1 = 128$, $a_5 = 162$; dar r y S_5.
17. Considerando $a_1 = 32$, $a_5 = 162$; dar r y S_5.
18. Considerando $a_1 = 7000$, $a_6 = 2.24$; dar r y S_6.
19. Insertar tres medianos geométricos entre 6 y 14,406.
20. Insertar cuatro medianos geométricos entre 6250 y -486.
21. Considerando $a_5 = 16$, $r = \frac{2}{3}$; dar a_1 y S_5.
22. Considerando $a_7 = 729$, $r = \frac{3}{2}$; dar a_1 y S_7.
23. Considerando $r = 2$, $S_9 = 1533$; dar a_1 y a_9.
24. Considerando $r = \frac{2}{3}$, $S_5 = 1477$; dar a_1 y a_5.
25. Considerando $a_1 = 50$, $r = 0.2$, $S_n = 62.496$; dar n y a_n.
26. Considerando $a_1 = 6\frac{3}{4}$, $r = -1\frac{1}{3}$, $S_n = 15\frac{1}{12}$; dar n y a_n.
27. Considerando $a_1 = 11$, $a_n = 2816$, $r = 2$; dar n y S_n.
28. Considerando $a_1 = 6$, $r = 7$, $a_n = 705{,}894$; dar n y S_n.
29. Considerando $a_1 = 121\frac{1}{2}$, $a_n = 512$, $S_n = 1683\frac{1}{2}$; dar r y n.
30. Considerando $a^1 = -15$, $a_n = 405$, $S_n = 300$; dar r y n.
31. Considerando $r = -4$, $a_n = 13{,}312$, $S_n = 10{,}660$; dar a_1 y n.
32. Considerando $r = -\frac{2}{3}$, $a_n = 1728$, $S_n = 12{,}501$; dar a_1 y n.
33. Considerando $a_1 = 9$, $S_3 = 279$; dar r y a_3.
34. Considerando $a_7 = 1458$, $a_{10} = 39{,}366$; dar a_{13}.
35. Considerando $a_7 = 156$, $a_{19} = 7644$; dar a_{31}.
36. Considerando $a_4 = 3$, $a_{13} = 10$; dar a_{22}.
37. Determinar x de manera que x, $2x + 7$, $10x - 7$ constituyen una progresión geométrica.
38. Determinar x de manera que $11 - x$, $2x - 1$, $9x + 3$, formen una progresión geométrica.

Derivar fórmulas para

39. r y S_n en términos de a_1, a_n, n.
40. a_1 y a_n en términos de r, n, S_n.
41. a_1 y S_n en términos de r, n, a_n.
42. a_n en términos de a_1, r, S_n.
43. a_1 en términos de r, a_n, S_n.

44. r en términos de a_1, a_n, S_n.
45. Comprobar la fórmula (3) del núm. 11.7. por inducción matemática.

11.9. Progresión geométrica infinita.

Considere un segmento de línea de 1 unidad de largo (Gráf. 11.1.). Suponga que quitamos la mitad de la línea, después la mitad de la parte que queda, después la mitad otra vez de lo que quede, etc... A medida que sacamos más y más partes, su suma se acercará a 1 en valor, puesto que lo que queda de la unidad original del segmento se reduce a nada. Los largos de los segmentos que sacamos son los términos de la progresión geométrica, ½, ¼, ⅛, · · · , cuya proporción es

GRÁF. 11.1.

½. Así, la suma de esta progresión, a medida que sacamos más y más términos, se aproxima al valor 1; es decir, que difiere de 1 por una cantidad tan pequeña como nos convenga. Una progresión geométrica en la cual el número de términos aumenta sin límite se llama una *progresión geométrica infinita,* o una *serie geométrica infinita.* Cuando la proporción es numéricamente menor de 1, la suma de n términos de la progresión, a medida que n aumenta sin límite, se aproxima a un valor perfectamente definido, llamado el *límite,* o la *suma* de la progresión. (Observar que no es una suma en el sentido común de la palabra.)

Ya que, con (4) del núm. 11.7, vemos que

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1}{1 - r} r^n. \qquad (1)$$

Ahora, cuando la proporción es numéricamente inferior a 1 ($|r| < 1$), el valor numérico de r^n disminuye a medida que n aumenta, y tomando una n sumamente grande, podemos formar $|r^n|$ y, en consecuencia $|a_1r^n/(1 - r)$, tan pequeño como lo deseamos. Es decir que, puesto que n aumenta sin límite, la última fracción en (1) se reduce hacia el valor cero y la suma de n términos de la progresión se aproxima al valor $a_1/(1 - r)$. En símbolos, escribimos

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}. \qquad (2)$$

Ejemplo.

Dar la "suma" de la progresión geométrica infinita 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\cdots$

SOLUCIÓN. $a_1 = 2,\ r = \dfrac{1}{3}.$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$$

EJERCICIOS XI. C

Dar las "sumas" de las progresiones geométricas infinitas siguientes:

1. $2, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \cdots$
2. $1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \cdots.$
3. $25, 10, 4, \cdots.$
4. $98, 42, 18, \cdots$
5. $\frac{3}{2}, -\frac{3}{10}, \frac{3}{50} \cdots.$
6. $24, -16, 10\frac{2}{3}, \cdots.$
7. $27, -18, 12, \cdots.$
8. $5, \frac{25}{8}, \frac{125}{64}, \cdots.$
9. $5, \sqrt{5}, 1, \cdots.$
10. $5, -\sqrt{5}, 1, \cdots.$
11. $6\sqrt{7}, 4, \dfrac{8}{3\sqrt{7}}, \cdots.$
12. $\sqrt{6}. -\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \cdots.$
13. $5 + 2\sqrt{3}, 1 + 3\sqrt{3}, 8 - 2\sqrt{3}, \cdots.$
14. $4 + \sqrt{2}, 8 - 5\sqrt{2}, 44 - 31\sqrt{2}, \cdots.$
15. $0.5, 0.05, 0.005, \cdots.$
16. $2, -0.02, 0.0002, \cdots.$
17. $1, (1.04)^{-1}, (1.04)^{-2}, \cdots.$
18. $(1.02)^{-1}, (1.02)^{-2}, (1.02)^{-3}, \cdots.$

11.10. Decimales repetidoras.

Una decimal repetidora es una progresión geométrica infinita. Así, $0.444 \cdots$ (escrito a veces $0.\dot{4}$) es la progresión

$$0.4 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \cdots,$$

en la cual $a_1 = 0.4$, $r = 0.1$. De la misma manera, la decimal repetidora $0.235,235,235 \cdots$ (escrito $0.\dot{2}3\dot{5}$) es la progresión

$$0.235 + 0.000,235 + 0.000,000,235 + \cdots,$$

en la cual $a_1 = 0.235$, $r = 0.001$.

Ejemplo 1.

Dar el valor límite de $0.444 \cdots$.

SOLUCIÓN.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0.4}{1 - 0.1} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9}.$$

Esto puede comprobarse dividiendo 4 por 9.

Ejemplo 2.

Dar el valor límite de $0.7\dot{4}\dot{3}$.

SOLUCIÓN. $0.7\dot{4}\dot{3} = 0.7 + 0.043 + 0.00043 + \cdots$.

Esto está compuesto por 0.7 y una progresión geométrica en la cual $a_1 = 0.043$, $r = 0.01$. Así,

$$\lim 0.7\dot{4}\dot{3} = \frac{7}{10} + \frac{0.043}{1 - 0.01} = \frac{7}{10} + \frac{0.043}{0.99}$$
$$= \frac{7}{10} + \frac{43}{990} = \frac{736}{990} = \frac{368}{495}.$$

Aunque la fórmula para S_∞ puede emplearse para encontrar el valor límite de una decimal repetidora, quizá el mejor método consiste en desarrollar la fórmula para la suma de una progresión geométrica.

Ejemplo 3.

Dar el valor límite de $0.444 \cdots$.

SOLUCIÓN. Que

$$x = 0.444 \cdots. \qquad (1)$$

multiplicar por 10: $$10x = 4.444 \cdots. \qquad (2)$$

(2) — (1) $$9x = 4,$$

$$x = \frac{4}{9}.$$

Ejemplo 4.

Dar el valor límite de $0.7\dot{4}\dot{3}$.

SOLUCIÓN. Que

$$x = 0.74343 \cdots. \qquad (3)$$

multiplicar por 100: $$100x = 74.34343 \cdots. \qquad (4)$$

(4) — (3) $$99x = 73.6,$$

$$x = \frac{73.6}{99} = \frac{736}{990} = \frac{368}{495}.$$

EJERCICIOS XI. D

Dar los valores límites de los decimales repetidores siguientes:

1. $0.444\cdots$ 2. $0.888\cdots$ 3. $0.999\cdots$

4. $0.1\dot{6}$. 5. $0.\dot{2}\dot{5}$. 6. $0.\dot{5}\dot{2}$.

7. $0.\dot{0}\dot{4}$. 8. $0.\dot{4}\dot{0}$. 9. $0.\dot{2}3\dot{1}$.

10. $0.23\dot{1}$. 11. $0.2\dot{3}\dot{1}$. 12. $0.\dot{2}57\dot{3}$.

13. $0.\dot{2}8571\dot{4}$. 14. $0.\dot{5}7142\dot{8}$. 15. $0.5\dot{3}6\dot{3}$.

16. $0.\dot{0}0\dot{3}$. 17. $0.\dot{0}3\dot{0}$. 18. $0.\dot{3}0\dot{0}$.

19. $0.\dot{3}0\dot{3}$. 20. $0.\dot{4}00\dot{4}$. 21. $0.\dot{1}234\dot{5}$.

11.11. Progresión armónica.

Una *progresión armónica* es una serie de términos cuyas recíprocas se encuentran en progresión aritmética. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, es una progresión armónica, puesto que 2, 4, 6, 8, es una progresión aritmética.

Ejemplo 1.

Dar el 7º término de la progresión armónica $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, -1, $\cdots$

Solución. Formar la progresión aritmética correspondiente: 4, $\frac{5}{2}$, -1, $\cdots$

$$d = -2.5,$$

Ahora, procediendo como en el núm. 11.2, escribimos

$$a_7 = a_1 + 6d = 4 + 6(-2.5) = -11.$$

Tomar la recíproca: $-\dfrac{1}{11}$.

Los términos de una progresión armónica entre cualesquiera de dos términos dados se llaman *medianos armónicos*.

Ejemplo 2.

Insertar 4 medianos armónicos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{17}$.

Solución. En la progresión aritmética correspondiente,

$$a_1 = 2, \qquad a_6 = 17.$$
$$17 = 2 + 5d, \qquad d = 3.$$

Progresión aritmética: 2, 5, 8, 11, 14, 17.
Progresión armónica: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{17}$.

No hay método más sencillo para encontrar la suma de una progresión armónica que sumar los términos uno por uno.

EJERCICIOS XI. E

1. Dar el 24º término de la progresión armónica $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$.
2. Dar el 32º término de la progresión armónica $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$, $\cdots$.
3. Dar el 10º término de la progresión armónica 6, 3, 2, $\cdots$.
4. Dar el 16º término de la progresión armónica 12, 6, 4, $\cdots$.
5. Dar el 15º término de la progresión armónica $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$.
6. Dar el 8º término de la progresión armónica $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{2}$, 5, $\cdots$.
7. Insertar 7 medianos armónicos entre 2 y 10.
8. Insertar nueve medianos armónicos entre 5 y 30.
9. El 3er. término de una progresión armónica es 15, el 9º término es 6. Dar (a) el 11º término, (b) el 14º término.
10. El 6º término de una progresión armónica es 12, el 10º término es 6. ¿Cuál es el 18º término?
11. Determinar x de manera que x, $x^2 - 5$, $2x$ formen una progresión armónica.
12. Determinar x de manera que $x - 1$, $\frac{1}{4}(2x + 3)$, $3x + 1$, formen una progresión armónica.
13. Encontrar una fórmula para el mediano armónico de dos números, a y b.

EJERCICIOS DIVERSOS XI. F

1. Determinar a_8 y S_8 para la progresión 5, 12, 19, $\cdots$.
2. Determinar a_5 y S_5 para la progresión 27, 45, 75, $\cdots$.
3. Determinar a_6 y S_6 para la progresión 162, 108, 72 $\cdots$.
4. Determinar a_{13} y S_{13} para la progresión 100, 82, 64, $\cdots$.
5. Determinar a_{25} y S_{25} para la progresión $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, 1, $\cdots$.
6. Determinar a_5 y S_5 para la progresión $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{49}{48}$, $\cdots$.
7. Encontrar el próximo término de la progresión 24, 12, 8, $\cdots$.
8. Encontrar a_4 para la progresión 12, 16, 24, $\cdots$.
9. ¿Cuál es el próximo término de la progresión 16, 8, $\cdots$ si es (a) ¿una progresión aritmética? (b) ¿geométrica? (c) ¿armónica?
10. Insertar (a) tres medianos aritméticos, (b) tres medianos geométricos, (c) tres medianos armónicos, entre 2 y 162.
11. Una partícula que resbala sobre un plano inclinado adelanta 2 pies en el primer segundo. Durante cualquier segundo que sigue al primero, resbala 4 pies más de lo que resbaló en el segundo anterior. (a) ¿Hasta dónde resbalará en el 7º segundo? (b) ¿Hasta dónde

resbalará en 7 segundos? (c) ¿Cuánto tiempo tardará para resbalar 128 pies?

12. Una rueda en vía de detenerse da 125 revoluciones en el primer segundo. Durante cualquier segundo que sigue al primero da las ⅘ del número de revoluciones que dio en el segundo anterior. ¿Cuántas revoluciones dará en el 5º segundo? (b) ¿en 5 segundos? (c) ¿antes de detenerse?

13. El peso de un péndulo se deja caer y en su primer balanceo se mueve 100 centímetros. En cada balanceo siguiente se mueve 0.99 de la distancia que recorrió en el balanceo anterior ¿Qué distancia habrá recorrido antes de detenerse?

14. Los boletos de una rifa están numerados 1, 2, 3, etc.. El precio de un boleto es el número de centavos igual al número del boleto. Si el artículo que se rifa costó $ 100.00 pesos, ¿cuál es el número mínimo de boletos que deben venderse para que los organizadores de la rifa no pierdan dinero?

15. Dar la suma de todos los integrantes nones entre 100 y 1,000.

16. Dar la suma de todos los integrantes pares entre 999 y 9999.

17. Dar la suma de todos los integrantes positivos menores de 1,000 que son exactamente divisibles por 7.

18. Un círculo tiene un radio de 16 pulgadas. Se ha dibujado en él un triángulo equilateral. En el triángulo se ha dibujado otro círculo y en el otro círculo, otro triángulo, etc.. Dar (a) la superficie del 6º círculo, (b) la suma de las superficies de todos los círculos, (c) la suma de las superficies de todos los triángulos.

19. El lado de un cuadrado tiene 16 pulgadas. Se forma otro cuadrado interior al juntar los puntos medios de cada lado. Se forma un tercer cuadrado juntando los puntos medios de los lados del cuadrado anterior, y así sucesivamente. Dar el tamaño del lado del 11º cuadrado.

20. Dos líneas se encuentran con determinado ángulo. Desde un punto de la primera línea, a 10 pulgadas del vértice del ángulo, se deja caer una perpendicular hasta la segunda línea. Del pie de la perpendicular, se estira otra perpendicular hasta la primera línea, y otra perpendicular hasta la primera línea, y así sucesivamente. Dar la suma de los largos de todas las perpendiculares cuando el ángulo es de (a) 45 grados, (b) 30 grados, (c) 60 grados.

21. Una máquina que cuesta $ 1,250.00 desprecia de valor en un 20 porciento cada año. ¿Qué valor tendrá al terminar 4 años?

22. Una colonia de bacterias aumenta en la proporción de 40 porciento por hora. Si había originalmente 25,000 bacterias en la colonia, ¿cuántas habrá al final de 5 horas?

23. Un envase de 16 galones se llena de ácido puro. Se sacan 4 galones y se sustituyen por agua. Entonces se sacan 4 galones de la mezcla

que también se sustituyen por agua y así sucesivamente hasta haber hecho cinco extracciones y cinco sustituciones. Dar la cantidad de ácido en la mezcla final.

24. La cantidad de trabajo que se requiere para sacar el agua de una cisterna cilíndrica de 4 pies de diámetro es de 392 pies-libras por el primer pie de hondo, 1,176 pies-libras para el segundo pie, 1,960 para el tercer pie, y así sucesivamente. Si la cisterna tiene 10 pies de hondo, ¿qué cantidad de trabajo se necesita para vaciarla completamente?

25. Cuando una placa rectangular se sumerge en agua de manera que la arista superior se encuentre en la superficie del agua, la fuerza en un lado de la placa es de $\frac{1}{2}lw$ para el primer pie de hondo, donde l es la dimensión horizontal de la placa, en pies, y w es el peso de 1 pie cúbico de agua (62.4 libras aproximadamente). La fuerza sobre cualquier pie, después del primero, es de lw libras más que sobre el pie anterior. Dar la fuerza en un lado de una placa que mida 6 pies horizontalmente y 12 pies verticalmente.

26. El tono de una nota musical dado por una cuerda vibradora depende del número de vibraciones por segundo producidas por la cuerda. Para una nota más alta en un octavo que la nota inicial, el número de vibraciones es 2 veces el número de vibraciones de la nota dada. Si el número de vibraciones por segundo para dar el C medio es de 256, ¿cuál es el número de vibraciones por segundo que dara (a) una nota cinco octavos arriba del C medio?, (b) una nota cuatro octavas debajo del C medio?

27. Cinco pesos se encuentran en progresión geométrica, el primero siendo de 1 libra y la proporción 2. Se colocan en una varilla, cuyo peso puede descontarse, el primero a una distancia de 1 pulgada de un punto de apoyo, el segundo a 2 pulgadas del citado punto, el tercero a 4 pulgadas, y sucesivamente, encontrándose estas distancias en progresión geométrica. ¿A qué distancia del punto de apoyo sobre el otro brazo de la varilla deberá colocarse un peso, igual a la suma de los pesos de los otros, de manera a obtener un equilibrio?

28. La suma de tres números en progresión geométrica es 52. Si se añade 8 al número de en medio, sin cambiar los demás, se obtiene una progresión aritmética. ¿Cuál es la progresión geométrica?

29. La suma de tres números en progresión aritmética es 33. Si se aumentan los números en 2, 1 y 6, respectivamente, los nuevos números formarán una progresión geométrica. ¿Cuál es la progresión aritmética?

Sugestión. Que los números sean $x - d$, x, $x + d$.

30. La suma de cuatro números en progresión aritmética es 42, la suma de sus cuadrados es 566. Dar los números.

31. El mediano geométrico y el mediano armónico de dos números son 12 y 7⅕ respectivamente. ¿Cuáles son los números?
32. Tres números se encuentran en progresión armónica. Si se le quita 4 al tercer número, los números se encontrarían en progresión aritmética. Si se le quita 3 al tercer número, los números estarían en progresión geométrica. Dar los números.
33. Comprobar que si a^2, b^2, c^2 forma una progresión aritmética, entonces $b + c$, $c + a$, $a + b$, es una progresión armónica.
34. El primero y el segundo término de una progresión son a y b, respectivamente. ¿Cuál es el tercer término si la progresión es (a) aritmética, (b) geométrica, (c) armónica?

CAPITULO XII

Números complejos

12.1. Números imaginarios y complejos.

En los núms. 5.16. y 5.17, de los cuales el presen tituye una revisión y una ampliación, hemos introducido naria i que tiene la propiedad $i^2 = -1$, suponiendo número obedece a todas las leyes de la adición y de que son válidas para números reales. Puesto que $i^2 =$ $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $\cdot$ notar que las potencias integrales sucesivas de i corre por el ciclo $i, -1, -i, 1$.

Un número con la forma $a + bi$ en el cual a y b so se llama un *número complejo*. El número a se llama el o *parte real*, del número complejo; el número b se llam *imaginario*, o *parte imaginaria*. Notar que el compon es un número real.

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son igua si, $a = c$ y $b = d$, es decir siempre y cuando sus co son iguales y sus componentes imaginarios son iguales

Si $b \neq 0$, el número complejo se llama un *númer* $b \neq 0$ y $a = 0$, el número complejo se reduce a la f llama un *número imaginario puro*. Cuando ni a ni b puede llamarse un *número imaginario mixto*.

Si $b = 0$, el número complejo reduce hasta el núm puede ser cero).

Los dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$, que di en los signos de sus partes imaginarias, se llaman *núm imaginarios*, cualquiera pudiendo ser el conjugado del

12.2. El sistema de números del álgebra.

El juego de todos los números complejos constituy

números del álgebra. El sistema se divide y subdivide como se muestra a continuación:

- Números complejos ($a + bi$; a, b, reales)
  - Números reales ($b = 0$)
    - Números racionales
      - Integrantes
      - Fracciones racionales
    - Números irracionales
      - Números algebraicos irracionales
      - Números trascendentales
  - Números imaginarios ($b \neq 0$)
    - Números imaginarios puros ($a = 0$)
    - Números imaginarios mixtos ($a \neq 0$)

Los números a y b pueden ser positivos o negativos.

Una *integrante* es un número entero o cero, es decir cualquiera de los números $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdot \cdot \cdot$.

Una *fracción racional* es una fracción en la cual el numerador y el denominador son números enteros, y en la cual el numerador es exactamente divisible por el denominador, por ejemplo $\tfrac{3}{4}$.

Un *número irracional* es cualquiera número real que no es racional

Un *número algebraico* es el número que es la raíz de una ecuación algebraica del tipo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

en la cual los a son números racionales y n es una integrante positiva. Ejemplo de un número algebraico es $\sqrt{2}$, puesto que es una raíz de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. No debe creerse que todos los números algebraicos son irracionales, puesto que cada número racional a/b es una raíz de una ecuación $bx - a = 0$. Un ejemplo de número complejo es $2 + \sqrt{3} \cdot i$, que es una raíz de la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 7 = 0$.

Un *número trascendente* es un número real que no puede ser la raíz de una ecuación algebraica del tipo (1), es decir, π, e.

En un número imaginario $a + bi$, a y b no se limitan a ser algebraicos.

EJERCICIOS XII. A

Dar cinco ejemplos de

1. Números imaginarios puros.
2. Números imaginarios mixtos.
3. Números racionales.
4. Números irracionales.
5. Números trascendentales.
6. Números complejos en los cuales la parte real y la parte imaginaria son ambas integrales.

CAPITULO XII

Números complejos

12.1. Números imaginarios y complejos.

En los núms. 5.16. y 5.17, de los cuales el presente capítulo constituye una revisión y una ampliación, hemos introducido la unidad imaginaria i que tiene la propiedad $i^2 = -1$, suponiendo que este nuevo número obedece a todas las leyes de la adición y de la multiplicación que son válidas para números reales. Puesto que $i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $\cdot \cdot \cdot$, se puede notar que las potencias integrales sucesivas de i corren repetidamente por el ciclo $i, -1, -i, 1$.

Un número con la forma $a + bi$ en el cual a y b son números reales se llama un *número complejo*. El número a se llama el *componente real*, o *parte real*, del número complejo; el número b se llama el *componente imaginario*, o *parte imaginaria*. Notar que el componente imaginario es un número real.

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si, solamente si, $a = c$ y $b = d$, es decir siempre y cuando sus componentes reales son iguales y sus componentes imaginarios son iguales también.

Si $b \neq 0$, el número complejo se llama un *número imaginario*. Si $b \neq 0$ y $a = 0$, el número complejo se reduce a la forma bi, que se llama un *número imaginario puro*. Cuando ni a ni b es cero, $a + bi$ puede llamarse un *número imaginario mixto*.

Si $b = 0$, el número complejo reduce hasta el número real a (que puede ser cero).

Los dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$, que difieren solamente en los signos de sus partes imaginarias, se llaman *números conjugados imaginarios*, cualquiera pudiendo ser el conjugado del otro.

12.2. El sistema de números del álgebra.

El juego de todos los números complejos constituye el *sistema de*

números del álgebra. El sistema se divide y subdivide como se muestra a continuación:

- Números complejos ($a + bi$; a, b, reales)
  - Números reales ($b = 0$)
    - Números racionales
      - Integrantes
      - Fracciones racionales
    - Números irracionales
      - Números algebraicos irracionales
      - Números trascendentales
  - Números imaginarios ($b \neq 0$)
    - Números imaginarios puros ($a = 0$)
    - Números imaginarios mixtos ($a \neq 0$)

Los números a y b pueden ser positivos o negativos.

Una *integrante* es un número entero o cero, es decir cualquiera de los números $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$.

Una *fracción racional* es una fracción en la cual el numerador y el denominador son números enteros, y en la cual el numerador es exactamente divisible por el denominador, por ejemplo $6/3$.

Un *número irracional* es cualquiera número real que no es racional

Un *número algebraico* es el número que es la raíz de una ecuación algebraica del tipo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

en la cual los a son números racionales y n es una integrante positiva. Ejemplo de un número algebraico es $\sqrt{2}$, puesto que es una raíz de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. No debe creerse que todos los números algebraicos son irracionales, puesto que cada número racional a/b es una raíz de una ecuación $bx - a = 0$. Un ejemplo de número complejo es $2 + \sqrt{3} \cdot i$, que es una raíz de la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 7 = 0$.

Un *número trascendente* es un número real que no puede ser la raíz de una ecuación algebraica del tipo (1), es decir, π, e.

En un número imaginario $a + bi$, a y b no se limitan a ser algebraicos.

EJERCICIOS XII. A

Dar cinco ejemplos de

1. Números imaginarios puros.
2. Números imaginarios mixtos.
3. Números racionales.
4. Números irracionales.
5. Números trascendentales.
6. Números complejos en los cuales la parte real y la parte imaginaria son ambas integrales.

CAPITULO XII

Números complejos

12.1. Números imaginarios y complejos.

En los núms. 5.16. y 5.17, de los cuales el presente capítulo constituye una revisión y una ampliación, hemos introducido la unidad imaginaria i que tiene la propiedad $i^2 = -1$, suponiendo que este nuevo número obedece a todas las leyes de la adición y de la multiplicación que son válidas para números reales. Puesto que $i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i, \cdot \cdot \cdot$, se puede notar que las potencias integrales sucesivas de i corren repetidamente por el ciclo $i, -1, -i, 1$.

Un número con la forma $a + bi$ en el cual a y b son números reales se llama un *número complejo*. El número a se llama el *componente real*, o *parte real*, del número complejo; el número b se llama el *componente imaginario*, o *parte imaginaria*. Notar que el componente imaginario es un número real.

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si, solamente si, $a = c$ y $b = d$, es decir siempre y cuando sus componentes reales son iguales y sus componentes imaginarios son iguales también.

Si $b \neq 0$, el número complejo se llama un *número imaginario*. Si $b \neq 0$ y $a = 0$, el número complejo se reduce a la forma bi, que se llama un *número imaginario puro*. Cuando ni a ni b es cero, $a + bi$ puede llamarse un *número imaginario mixto*.

Si $b = 0$, el número complejo reduce hasta el número real a (que puede ser cero).

Los dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$, que difieren solamente en los signos de sus partes imaginarias, se llaman *números conjugados imaginarios*, cualquiera pudiendo ser el conjugado del otro.

12.2. El sistema de números del álgebra.

El juego de todos los números complejos constituye el *sistema de*

números del álgebra. El sistema se divide y subdivide como se muestra a continuación:

- Números complejos ($a + bi$; a, b, reales)
  - Números reales ($b = 0$)
    - Números racionales
      - Integrantes
      - Fracciones racionales
    - Números irracionales
      - Números algebraicos irracionales
      - Números trascendentales
  - Números imaginarios ($b \neq 0$)
    - Números imaginarios puros ($a = 0$)
    - Números imaginarios mixtos ($a \neq 0$)

Los números a y b pueden ser positivos o negativos.

Una *integrante* es un número entero o cero, es decir cualquiera de los números $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$.

Una *fracción racional* es una fracción en la cual el numerador y el denominador son números enteros, y en la cual el numerador es exactamente divisible por el denominador, por ejemplo 6/3.

Un *número irracional* es cualquiera número real que no es racional

Un *número algebraico* es el número que es la raíz de una ecuación algebraica del tipo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

en la cual los a son números racionales y n es una integrante positiva. Ejemplo de un número algebraico es $\sqrt{2}$, puesto que es una raíz de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. No debe creerse que todos los números algebraicos son irracionales, puesto que cada número racional a/b es una raíz de una ecuación $bx - a = 0$. Un ejemplo de número complejo es $2 + \sqrt{3} \cdot i$, que es una raíz de la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 7 = 0$.

Un *número trascendente* es un número real que no puede ser la raíz de una ecuación algebraica del tipo (1), es decir, π, e.

En un número imaginario $a + bi$, a y b no se limitan a ser algebraicos.

EJERCICIOS XII. A

Dar cinco ejemplos de

1. Números imaginarios puros.
2. Números imaginarios mixtos.
3. Números racionales.
4. Números irracionales.
5. Números trascendentales.
6. Números complejos en los cuales la parte real y la parte imaginaria son ambas integrales.

Dar un ejemplo de

7. Un número complejo en el cual la parte real es irra
imaginaria es integral.
8. Un número complejo en el cual la parte real es una
y la parte imaginaria es irracional.
9. Un número complejo en el cual la parte real y la
son ambas irracionales.
10. Un número complejo en el cual la parte real es tr
parte imaginaria es un número irracional algebraico.

12.3. Operaciones con números complejos.

Sumamos o sustraemos números complejos sumand
sus partes reales y sus partes imaginarias separadamen

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b +$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b -$$

Multiplicamos números complejos de acuerdo con la
para los números reales, y simplificamos los resultados e
lación $i^2 = -1$. Así,

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci +$$
$$= (ac - bd) + (ad$$

La división de números complejos puede lograrse e
ciente en forma fraccional y multiplicando el numerado
dor por el conjugado del denominador. Así,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi +}{c^2 -}$$
$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$
$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i \quad (c + di \neq$$

EJERCICIOS XII. B

Resolver las operaciones indicadas y reducir a la for

1. $(5 + 7i) + (8 + 2i)$.
2. $(3 + 4i) + ($
3. $(11 + 2i) + (3 - 14i)$.
4. $(19 - i) + ($
5. $(15 + 2i) - (6 + 4i)$.
6. $(20 - 11i) -$
7. $(-10 + 9i) - (3 - 7i)$.
8. $(6 - 14i) -$

9. $(1 + i\sqrt{3}) - (7 + 2\sqrt{3} \cdot i)$.
10. $(\sqrt{2} + i\sqrt{3}) - (6\sqrt{2} - 7\sqrt{3} \cdot i)$.
11. $(2 + 6i) + (6 - 5i) - (4 - 11i)$.
12. $(6 + 3i)(2 + 4i)$.
13. $(9 + 8i)(7 - 6i)$.
14. $(6 + 3i)(2 + 5i)$.
15. $(5 - 3i)(7 - 2i)$.
16. $(2 + i\sqrt{3})(5 - 6\sqrt{3} \cdot i)$.
17. $(7\sqrt{2} - 6\sqrt{5} \cdot i)(2\sqrt{2} - 7\sqrt{5} \cdot i)$.
18. $(3 + 2i)(7 - 8i)(-2 + 9i)$.
19. $(5 + 3i)^2$.
20. $(3 - 2i)^3$.
21. $(6 + 7i) \div (4 - 3i)$.
22. $(8 - 3i) \div (9 + 4i)$.
23. $(2 - 11i) \div (3 - 2i)$.
24. $5i \div (6 - 7i)$.
25. $(\sqrt{3} - i\sqrt{7}) \div (2\sqrt{3} + 3\sqrt{7} \cdot i)$.
26. $(8\sqrt{5} + 21\sqrt{3} \cdot i) \div (2\sqrt{5} - 7\sqrt{3} \cdot i)$.
27. $(\sqrt{6} + 6\sqrt{10} \cdot i) \div (2\sqrt{6} - 3\sqrt{10} \cdot i)$.
28. $(\sqrt{7} + i\sqrt{5}) \div (\sqrt{5} + i\sqrt{7})$.
29. $(2 + 3i)(3 - 4i) \div (4 + 5i)$.
30. $(5 + 6i)^2 \div (9 - 2i)$.
31. $(-5 + 8i) \div (3 + 2i)^2$.
32. $\dfrac{8 + 7i}{(5 + 6i)(5 - 2i)}$.
33. $\dfrac{(10i - 3)(4i + 3)}{9i - 8}$.
34. $\dfrac{(1 + 2i)(2 + 3i)}{(3 + 4i)(4 + 5i)}$
35. $\dfrac{(3 - 5i)(7 + 4i)}{(5 + 3i)(6 - i)}$
36. Mostrar que la suma de dos números imaginarios conjugados es real.
37. Mostrar que la diferencia de dos números imaginarios conjugados es un número imaginario puro.
38. Mostrar que el producto de dos números imaginarios conjugados es real y positivo.
39. Mostrar que la parte real del cociente de dos números imaginarios conjugados es numéricamente inferior o igual a 1.
40. Mostrar que la parte imaginaria del cociente de dos números imaginarios conjugados es numéricamente inferior a 1.

12.4. Representación geométrica de números complejos.

El número complejo $x + yi$ puede representarse por el punto P cuyas coordinadas son (x, y) (ver Gráfica 12.1.). Cuando los números complejos se representan de esta manera, el eje x se llama el *eje de los números reales* y el eje y se llama el *eje de los números imaginarios.* Todos los números reales se encuentran en el eje de los números reales, todos

Dar un ejemplo de

7. Un número complejo en el cual la parte real es irracional y la parte imaginaria es integral.
8. Un número complejo en el cual la parte real es una fracción racional y la parte imaginaria es irracional.
9. Un número complejo en el cual la parte real y la parte imaginaria son ambas irracionales.
10. Un número complejo en el cual la parte real es trascendental y la parte imaginaria es un número irracional algebraico.

12.3. Operaciones con números complejos.

Sumamos o sustraemos números complejos sumando o sustrayendo sus partes reales y sus partes imaginarias separadamente. Así,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Multiplicamos números complejos de acuerdo con las leyes que rigen para los números reales, y simplificamos los resultados empleando la relación $i^2 = -1$. Así,

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

La división de números complejos puede lograrse escribiendo el cociente en forma fraccional y multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Así,

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2}\\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}\\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i \quad (c + di \neq 0).\end{aligned}$$

EJERCICIOS XII. B

Resolver las operaciones indicadas y reducir a la forma $a + bi$:

1. $(5 + 7i) + (8 + 2i)$.
2. $(3 + 4i) + (6 + 5i)$.
3. $(11 + 2i) + (3 - 14i)$.
4. $(19 - i) + (2 - 13i)$.
5. $(15 + 2i) - (6 + 4i)$.
6. $(20 - 11i) - (25 + 2i)$.
7. $(-10 + 9i) - (3 - 7i)$.
8. $(6 - 14i) - (-10 + 17i)$.

9. $(1 + i\sqrt{3}) - (7 + 2\sqrt{3} \cdot i)$.
10. $(\sqrt{2} + i\sqrt{3}) - (6\sqrt{2} - 7\sqrt{3} \cdot i)$.
11. $(2 + 6i) + (6 - 5i) - (4 - 11i)$.
12. $(6 + 3i)(2 + 4i)$.
13. $(9 + 8i)(7 - 6i)$.
14. $(6 + 3i)(2 + 5i)$.
15. $(5 - 3i)(7 - 2i)$.
16. $(2 + i\sqrt{3})(5 - 6\sqrt{3} \cdot i)$.
17. $(7\sqrt{2} - 6\sqrt{5} \cdot i)(2\sqrt{2} - 7\sqrt{5} \cdot i)$.
18. $(3 + 2i)(7 - 8i)(-2 + 9i)$.
19. $(5 + 3i)^2$.
20. $(3 - 2i)^3$.
21. $(6 + 7i) \div (4 - 3i)$.
22. $(8 - 3i) \div (9 + 4i)$.
23. $(2 - 11i) \div (3 - 2i)$.
24. $5i \div (6 - 7i)$.
25. $(\sqrt{3} - i\sqrt{7}) \div (2\sqrt{3} + 3\sqrt{7} \cdot i)$.
26. $(8\sqrt{5} + 21\sqrt{3} \cdot i) \div (2\sqrt{5} - 7\sqrt{3} \cdot i)$.
27. $(\sqrt{6} + 6\sqrt{10} \cdot i) \div (2\sqrt{6} - 3\sqrt{10} \cdot i)$.
28. $(\sqrt{7} + i\sqrt{5}) \div (\sqrt{5} + i\sqrt{7})$.
29. $(2 + 3i)(3 - 4i) \div (4 + 5i)$.
30. $(5 + 6i)^2 \div (9 - 2i)$.
31. $(-5 + 8i) \div (3 + 2i)^2$.
32. $\dfrac{8 + 7i}{(5 + 6i)(5 - 2i)}$.
33. $\dfrac{(10i - 3)(4i + 3)}{9i - 8}$.
34. $\dfrac{(1 + 2i)(2 + 3i)}{(3 + 4i)(4 + 5i)}$
35. $\dfrac{(3 - 5i)(7 + 4i)}{(5 + 3i)(6 - i)}$
36. Mostrar que la suma de dos números imaginarios conjugados es real.
37. Mostrar que la diferencia de dos números imaginarios conjugados es un número imaginario puro.
38. Mostrar que el producto de dos números imaginarios conjugados es real y positivo.
39. Mostrar que la parte real del cociente de dos números imaginarios conjugados es numéricamente inferior o igual a 1.
40. Mostrar que la parte imaginaria del cociente de dos números imaginarios conjugados es numéricamente inferior a 1.

12.4. Representación geométrica de números complejos.

El número complejo $x + yi$ puede representarse por el punto P cuyas coordinadas son (x, y) (ver Gráfica 12.1.). Cuando los números complejos se representan de esta manera, el eje x se llama el *eje de los números reales* y el eje y se llama el *eje de los números imaginarios*. Todos los números reales se encuentran en el eje de los números reales, todos

Dar un ejemplo de

7. Un número complejo en el cual la parte real es irracional y la parte imaginaria es integral.
8. Un número complejo en el cual la parte real es una fracción racional y la parte imaginaria es irracional.
9. Un número complejo en el cual la parte real y la parte imaginaria son ambas irracionales.
10. Un número complejo en el cual la parte real es trascendental y la parte imaginaria es un número irracional algebraico.

12.3. Operaciones con números complejos.

Sumamos o sustraemos números complejos sumando o sustrayendo sus partes reales y sus partes imaginarias separadamente. Así,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Multiplicamos números complejos de acuerdo con las leyes que rigen para los números reales, y simplificamos los resultados empleando la relación $i^2 = -1$. Así,

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

La división de números complejos puede lograrse escribiendo el cociente en forma fraccional y multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Así,

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i \quad (c + di \neq 0).\end{aligned}$$

EJERCICIOS XII. B

Resolver las operaciones indicadas y reducir a la forma $a + bi$:

1. $(5 + 7i) + (8 + 2i)$.
2. $(3 + 4i) + (6 + 5i)$.
3. $(11 + 2i) + (3 - 14i)$.
4. $(19 - i) + (2 - 13i)$.
5. $(15 + 2i) - (6 + 4i)$.
6. $(20 - 11i) - (25 + 2i)$.
7. $(-10 + 9i) - (3 - 7i)$.
8. $(6 - 14i) - (-10 + 17i)$.

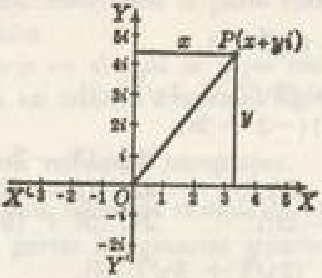
9. $(1 + i\sqrt{3}) - (7 + 2\sqrt{3} \cdot i)$.
10. $(\sqrt{2} + i\sqrt{3}) - (6\sqrt{2} - 7\sqrt{3} \cdot i)$.
11. $(2 + 6i) + (6 - 5i) - (4 - 11i)$.
12. $(6 + 3i)(2 + 4i)$.
13. $(9 + 8i)(7 - 6i)$.
14. $(6 + 3i)(2 + 5i)$.
15. $(5 - 3i)(7 - 2i)$.
16. $(2 + i\sqrt{3})(5 - 6\sqrt{3} \cdot i)$.
17. $(7\sqrt{2} - 6\sqrt{5} \cdot i)(2\sqrt{2} - 7\sqrt{5} \cdot i)$.
18. $(3 + 2i)(7 - 8i)(-2 + 9i)$.
19. $(5 + 3i)^2$.
20. $(3 - 2i)^3$.
21. $(6 + 7i) \div (4 - 3i)$.
22. $(8 - 3i) \div (9 + 4i)$.
23. $(2 - 11i) \div (3 - 2i)$.
24. $5i \div (6 - 7i)$.
25. $(\sqrt{3} - i\sqrt{7}) \div (2\sqrt{3} + 3\sqrt{7} \cdot i)$.
26. $(8\sqrt{5} + 21\sqrt{3} \cdot i) \div (2\sqrt{5} - 7\sqrt{3} \cdot i)$.
27. $(\sqrt{6} + 6\sqrt{10} \cdot i) \div (2\sqrt{6} - 3\sqrt{10} \cdot i)$.
28. $(\sqrt{7} + i\sqrt{5}) \div (\sqrt{5} + i\sqrt{7})$.
29. $(2 + 3i)(3 - 4i) \div (4 + 5i)$.
30. $(5 + 6i)^2 \div (9 - 2i)$.
31. $(-5 + 8i) \div (3 + 2i)^2$.
32. $\dfrac{8 + 7i}{(5 + 6i)(5 - 2i)}$.
33. $\dfrac{(10i - 3)(4i + 3)}{9i - 8}$.
34. $\dfrac{(1 + 2i)(2 + 3i)}{(3 + 4i)(4 + 5i)}$
35. $\dfrac{(3 - 5i)(7 + 4i)}{(5 + 3i)(6 - i)}$
36. Mostrar que la suma de dos números imaginarios conjugados es real.
37. Mostrar que la diferencia de dos números imaginarios conjugados es un número imaginario puro.
38. Mostrar que el producto de dos números imaginarios conjugados es real y positivo.
39. Mostrar que la parte real del cociente de dos números imaginarios conjugados es numéricamente inferior o igual a 1.
40. Mostrar que la parte imaginaria del cociente de dos números imaginarios conjugados es numéricamente inferior a 1.

12.4. Representación geométrica de números complejos.

El número complejo $x + yi$ puede representarse por el punto P cuyas coordinadas son (x, y) (ver Gráfica 12.1.). Cuando los números complejos se representan de esta manera, el eje x se llama el *eje de los números reales* y el eje y se llama el *eje de los números imaginarios.* Todos los números reales se encuentran en el eje de los números reales, todos

los números imaginarios se encuentran en el eje de lo ginarios.

El número complejo $x + yi$ puede también repr línea OP que va desde el origen al punto P. Esta línea,



GRÁF. 12.1.

y dirección, se llama un *vector*. Los vectores son impo y en mecánica.

12.5. Adición y sustracción geométrica de números

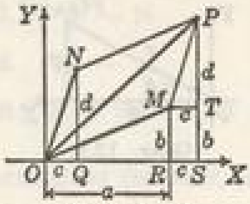
Procuremos que los números complejos $a + bi$ y c presentados por los puntos M y N respectivamente, y su $+ (b + d)i$, por el punto P (ver Gráfica 12.2.). Dib MP, NP; tire NQ, MR, PS perpendicular a OX; tire lar a PS. Entonces $MT = RS = OS - OR = (a +$ OQ, $TP = SP - ST = (b + d) - b = QN$. Por lo gulos rectos MTP y OQN son congruentes, y $MP =$ $\angle TPM = \angle QNO$ y MP es paralelo a ON. Los cuadril dan un paralelogramo, puesto que dos lados son ambo ralelos.

Así, para sumar gráficamente, o geométricamente, do plejos, hay que completar el paralogramo que tiene como tes las líneas estiradas desde el origen hasta los puntos los dos números. El cuarto vértice de este paralelogram que representa la suma de los dos números.*

Cuando pensamos en los números complejos $a +$ representados por los vectores OM y ON de la Gráfica de los números será el vector OP.

* Cuando el origen O y los puntos M y N se encuentran recta, el punto P se encontrará en esta línea y OP será igu

Para sustraer $c + di$ de $a + bi$ gráficamente, podemos sumar $a + bi$ y $-c - di$. Notar que el negativo de un número complejo representado por el punto P puede obtenerse extendiendo PO hasta un



Gráf. 12.2.

punto P' de manera que OP y OP' sean iguales de largo pero en direcciones opuestas.

EJERCICIOS XII. C

Resolver geométricamente las operaciones indicadas:

1. $(6 + 2i) + (2 + 5i)$.
2. $(3 - i) + (8 + 9i)$.
3. $(-4 - 3i) + (4 + 7i)$.
4. $(2 + 3i) + (4 + 6i)$.
5. $(3 + 7i) - (5 + i)$.
6. $2i + (10 - 9i)$.
7. $5 - (2 + 6i)$.
8. $(12 - 15i) - (4 - 8i)$.
9. $(7 + 3i) - (3 + 7i)$.
10. $(7 + 2i) - (7 - 6i)$.
11. $(14 - 6i) - (7 - 3i)$.
12. $(15 - 11i) + (10 + 11i)$.
13. $10 - (4 + 3i)$.
14. $10i - (4 + 3i)$.
15. $(7 + 3i) + (8 + i) + (5 - 4i)$.
16. $(5 + 2i) + (4 - 6i) - (3 + 7i)$.
17. $(10 + 3i) - (5 - 5i) - (8 - 2i)$.

12.6. Forma trigonométrica de los números complejos.*

Que el número complejo $x + yi$ sea representado por el punto P en la Gráfica 12.3. Que $OP = r$, y que el ángulo XOP se designe por A. Entonces

$$x = r \cos A, \qquad y = r \operatorname{sen} A,$$

y el número complejo puede escribirse

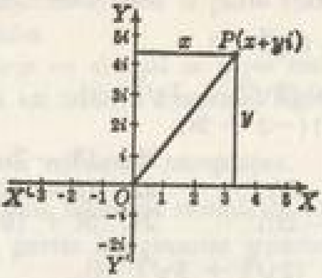
$$x + yi = r(\cos A + i \operatorname{sen} A). \tag{1}$$

Esta última forma, que puede convenientemente abreviarse $r \operatorname{cis} A$, se llama la *forma trigonométrica o polar* del número. El ángulo A se llama la *amplitud* o *argumento* del número, el largo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se llama el *módulo* o el *valor absoluto* del número.

* Las secciones finales de este Capítulo presuponen un conocimiento de trigonometría.

los números imaginarios se encuentran en el eje de los números imaginarios.

El número complejo $x + yi$ puede también representarse por la línea *OP* que va desde el origen al punto *P*. Esta línea, que tiene largo



GRÁF. 12.1.

y dirección, se llama un *vector*. Los vectores son importantes en física y en mecánica.

12.5. Adición y sustracción geométrica de números complejos.

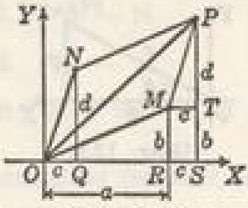
Procuremos que los números complejos $a + bi$ y $c + di$ sean representados por los puntos *M* y *N* respectivamente, y su suma $(a + c) + (b + d)i$, por el punto *P* (ver Gráfica 12.2.). Dibujar *OM, ON, MP, NP;* tire *NQ, MR, PS* perpendicular a *OX;* tire *MT* perpendicular a *PS*. Entonces $MT = RS = OS - OR = (a + c) - a = c = OQ$, $TP = SP - ST = (b + d) - b = QN$. Por lo tanto los triángulos rectos *MTP* y *OQN* son congruentes, y $MP = ON$. También $\angle TPM = \angle QNO$ y *MP* es paralelo a *ON*. Los cuadrilaterales *OMPN* dan un paralelogramo, puesto que dos lados son ambos iguales y paralelos.

Así, para sumar gráficamente, o geométricamente, dos números complejos, hay que completar el paralogramo que tiene como lados adyacentes las líneas estiradas desde el origen hasta los puntos que representan los dos números. El cuarto vértice de este paralelogramo será el punto que representa la suma de los dos números.*

Cuando pensamos en los números complejos $a + bi$ y $c + di$, representados por los vectores *OM* y *ON* de la Gráfica 12.2, la suma de los números será el vector *OP*.

* Cuando el origen *O* y los puntos *M* y *N* se encuentran en la misma línea recta, el punto *P* se encontrará en esta línea y *OP* será igual a $OM + ON$.

Para sustraer $c + di$ de $a + bi$ gráficamente, podemos sumar $a + bi$ y $-c - di$. Notar que el negativo de un número complejo representado por el punto P puede obtenerse extendiendo PO hasta un



GRÁF. 12.2.

punto P' de manera que OP y OP' sean iguales de largo pero en direcciones opuestas.

EJERCICIOS XII. C

Resolver geométricamente las operaciones indicadas:

1. $(6 + 2i) + (2 + 5i)$.
2. $(3 - i) + (8 + 9i)$.
3. $(-4 - 3i) + (4 + 7i)$.
4. $(2 + 3i) + (4 + 6i)$.
5. $(3 + 7i) - (5 + i)$.
6. $2i + (10 - 9i)$.
7. $5 - (2 + 6i)$.
8. $(12 - 15i) - (4 - 8i)$.
9. $(7 + 3i) - (3 + 7i)$.
10. $(7 + 2i) - (7 - 6i)$.
11. $(14 - 6i) - (7 - 3i)$.
12. $(15 - 11i) + (10 + 11i)$.
13. $10 - (4 + 3i)$.
14. $10i - (4 + 3i)$.
15. $(7 + 3i) + (8 + i) + (5 - 4i)$.
16. $(5 + 2i) + (4 - 6i) - (3 + 7i)$.
17. $(10 + 3i) - (5 - 5i) - (8 - 2i)$.

12.6. Forma trigonométrica de los números complejos.*

Que el número complejo $x + yi$ sea representado por el punto P en la Gráfica 12.3. Que $OP = r$, y que el ángulo XOP se designe por A. Entonces

$$x = r \cos A, \qquad y = r \operatorname{sen} A,$$

y el número complejo puede escribirse

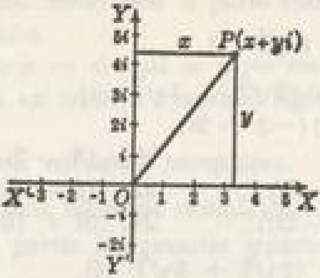
$$x + yi = r(\cos A + i \operatorname{sen} A). \qquad (1)$$

Esta última forma, que puede convenientemente abreviarse $r \operatorname{cis} A$, se llama la *forma trigonométrica o polar* del número. El ángulo A se llama la *amplitud* o *argumento* del número, el largo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se llama el *módulo* o el *valor absoluto* del número.

* Las secciones finales de este Capítulo presuponen un conocimiento de trigonometría.

los números imaginarios se encuentran en el eje de los números imaginarios.

El número complejo $x + yi$ puede también representarse por la línea OP que va desde el origen al punto P. Esta línea, que tiene largo



GRÁF. 12.1.

y dirección, se llama un *vector*. Los vectores son importantes en física y en mecánica.

12.5. Adición y sustracción geométrica de números complejos.

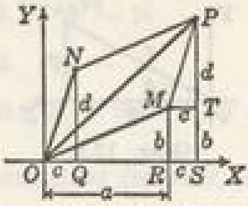
Procuremos que los números complejos $a + bi$ y $c + di$ sean representados por los puntos M y N respectivamente, y su suma $(a + c) + (b + d)i$, por el punto P (ver Gráfica 12.2.). Dibujar OM, ON, MP, NP; tire NQ, MR, PS perpendicular a OX; tire MT perpendicular a PS. Entonces $MT = RS = OS - OR = (a + c) - a = c = OQ$, $TP = SP - ST = (b + d) - b = QN$. Por lo tanto los triángulos rectos MTP y OQN son congruentes, y $MP = ON$. También $\angle TPM = \angle QNO$ y MP es paralelo a ON. Los cuadrilaterales $OMPN$ dan un paralelogramo, puesto que dos lados son ambos iguales y paralelos.

Así, para sumar gráficamente, o geométricamente, dos números complejos, hay que completar el paralogramo que tiene como lados adyacentes las líneas estiradas desde el origen hasta los puntos que representan los dos números. El cuarto vértice de este paralelogramo será el punto que representa la suma de los dos números.*

Cuando pensamos en los números complejos $a + bi$ y $c + di$, representados por los vectores OM y ON de la Gráfica 12.2, la suma de los números será el vector OP.

* Cuando el origen O y los puntos M y N se encuentran en la misma línea recta, el punto P se encontrará en esta línea y OP será igual a $OM + ON$.

Para sustraer $c + di$ de $a + bi$ gráficamente, podemos sumar $a + bi$ y $-c - di$. Notar que el negativo de un número complejo representado por el punto P puede obtenerse extendiendo PO hasta un



GRÁF. 12.2.

punto P' de manera que OP y OP' sean iguales de largo pero en direcciones opuestas.

EJERCICIOS XII. C

Resolver geométricamente las operaciones indicadas:

1. $(6 + 2i) + (2 + 5i)$.
2. $(3 - i) + (8 + 9i)$.
3. $(-4 - 3i) + (4 + 7i)$.
4. $(2 + 3i) + (4 + 6i)$.
5. $(3 + 7i) - (5 + i)$.
6. $2i + (10 - 9i)$.
7. $5 - (2 + 6i)$.
8. $(12 - 15i) - (4 - 8i)$.
9. $(7 + 3i) - (3 + 7i)$.
10. $(7 + 2i) - (7 - 6i)$.
11. $(14 - 6i) - (7 - 3i)$.
12. $(15 - 11i) + (10 + 11i)$.
13. $10 - (4 + 3i)$.
14. $10i - (4 + 3i)$.
15. $(7 + 3i) + (8 + i) + (5 - 4i)$.
16. $(5 + 2i) + (4 - 6i) - (3 + 7i)$.
17. $(10 + 3i) - (5 - 5i) - (8 - 2i)$.

12.6. Forma trigonométrica de los números complejos.*

Que el número complejo $x + yi$ sea representado por el punto P en la Gráfica 12.3. Que $OP = r$, y que el ángulo XOP se designe por A. Entonces

$$x = r \cos A, \qquad y = r \operatorname{sen} A,$$

y el número complejo puede escribirse

$$x + yi = r(\cos A + i \operatorname{sen} A). \qquad (1)$$

Esta última forma, que puede convenientemente abreviarse $r \operatorname{cis} A$, se llama la *forma trigonométrica o polar* del número. El ángulo A se llama la *amplitud* o *argumento* del número, el largo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se llama el *módulo* o el *valor absoluto* del número.

* Las secciones finales de este Capítulo presuponen un conocimiento de trigonometría.

Notar que $A = y/x$. Para A escogemos generalmente
pequeño que satisfaga la relación 0 grado $\leq A < 360$

GRÁF. 12.3.

La definición del valor absoluto de un número complej
con la que se dio para el valor absoluto de un número re
ro 1.4.). Porque, cuando $x + yi$ es real, y es cero
se transforma en $\sqrt{x^2}$, que es igual a $|x|$. El valor obsolu
exactamente $\sqrt{x^2 + y^2}$, se escribe también $|x + yi|$.

EJERCICIOS XII. D **

Reducir a la forma trigonométrica:

1. $-5 + 5i$.

SOLUCIÓN.

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$\tan A = \frac{5}{-5} = -1, \qquad A = 135 \text{ grados.}$$

$$-5 + 5i = 5\sqrt{2}\,(\cos 135 \text{ gr.} + i \text{ sen } 135 \text{ gr.}$$

(Se aconseja al estudiante que sitúe el punto co
para determinar el ángulo.)

2. $3 + 4i$.

SOLUCIÓN.

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\tan A = \frac{4}{3} = 1.3333,$$

$$A = 53.1 \text{ grados (de las tablas trigonométr}$$

$$3 + 4i = 5(\cos 53.1 \text{ grados} + i \text{ sen } 53.1 \text{ grado}$$

3. $7 + 7i$. 4. $1 - i\sqrt{3}$. 5. $4 +$

** La Tabla VIII al final de este libro puede emplearse pa
ejercicios.

6. $\sqrt{3} - i$. 7. $-6 - 6\sqrt{3}\ i$. 8. -4.

9. $8i$. 10. $12 - 5i$. 11. $-8 + 15i$.

12. $7 + 24i$. 13. $-9 - 9i$. 14. $-21 - 20i$.

15. $\sqrt{5} + i\sqrt{2}$. 16. $\sqrt{7} - i$. 17. $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i$.

18. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$. 19. $\frac{1}{5} - \frac{1}{12}i$. 20. $-\frac{1}{15} + \frac{1}{6}i$.

Reducir a la forma rectangular (es decir, la forma $a + bi$):

21. 10(cos 60 gr. + i sen 60 gr.). 22. 8(cos 30 gr. + i sen 30 gr.).
23. 6(cos 45 gr. + i sen 45 gr.).
24. 5(cos 225 gr. + i sen 225 gr.).
25. 4(cos 135 gr. + i sen 135 gr.).
26. 2(cos 120 gr. + i sen 120 gr.).
27. $\sqrt{2}$ (cos 315 gr. + i sen 315 gr.).
28. $\sqrt{3}$ (cos 300 gr. + i sen 300 gr.).
29. cos(−60 gr.) + i sen (−60 gr.).
30. 3(cos 90 gr. + i sen 90 gr.).
31. 5(cos 270 gr. + i sen 270 gr.). 32. 6(cos 240 gr. + i sen 240 gr.).
33. 100(cos 100 gr. + i sen 300 gr.).
34. 12(cos 256 gr. + i sen 256 gr.).
35. 9(cos 128 gr. + i sen 128 gr.).
36. 5(cos 500 gr. + i sen 500 gr.).
37. 20(cos 180 gr. + i sen 180 gr.).
38. 15(cos 345 gr. + i sen 345 gr.).

12.7. Multiplicación y división de números complejos en la forma trigonométrica.

Los números complejos expresados en forma trigonométrica puedn multiplicarse por medio de una fórmula muy sencilla. Por ejemplo,

$$r_1(\cos A_1 + i \operatorname{sen} A_1) \cdot r_2(\cos A_2 + i \operatorname{sen} A_2)$$
$$= r_1r_2[\cos A_1 \cos A_2 - \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 + i(\operatorname{sen} A_1 \cos A_2 + \cos A_1 \operatorname{sen} A_2)]$$
$$= r_1r_2[\cos (A_1 + A_2) + i \operatorname{sen} (A_1 + A_1)]. \qquad (1)$$

Es decir que, el producto de dos números complejos es un número complejo cuyo valor absoluto es el producto de sus valores absolutos y cuya amplitud es la suma de sus amplitudes.

La división es el contrario de la multiplicación y puede demostrarse con facilidad que, a la inversa, el cociente de dos números complejos

Notar que $A = y/x$. Para A escogemos generalmente el ángulo más pequeño que satisfaga la relación 0 grado $\leqq A <$ 360 grados.

Gráf. 12.3.

La definición del valor absoluto de un número complejo es consistente con la que se dio para el valor absoluto de un número real (ver número 1.4.). Porque, cuando $x + yi$ es real, y es cero y $\sqrt{x^2 + y^2}$ se transforma en $\sqrt{x^2}$, que es igual a $|x|$. El valor obsoluto de $x + yi$, exactamente $\sqrt{x^2 + y^2}$, se escribe también $|x + yi|$.

EJERCICIOS XII. D **

Reducir a la forma trigonométrica:

1. $-5 + 5i$.

Solución.

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$\tan A = \frac{5}{-5} = -1, \qquad A = 135 \text{ grados.}$$

$$-5 + 5i = 5\sqrt{2}\,(\cos 135 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 135 \text{ gr.}).$$

(Se aconseja al estudiante que sitúe el punto como una ayuda para determinar el ángulo.)

2. $3 + 4i$.

Solución.

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\tan A = \frac{4}{3} = 1.3333,$$

$$A = 53.1 \text{ grados (de las tablas trigonométricas).}$$

$$3 + 4i = 5(\cos 53.1 \text{ grados} + i \operatorname{sen} 53.1 \text{ grados}).$$

3. $7 + 7i$. 4. $1 - i\sqrt{3}$. 5. $4 + 2i$.

** La Tabla VIII al final de este libro puede emplearse para resolver estos ejercicios.

6. $\sqrt{3} - i$.	7. $-6 - 6\sqrt{3}\ i$.	8. -4.
9. $8i$.	10. $12 - 5i$.	11. $-8 + 15i$.
12. $7 + 24i$.	13. $-9 - 9i$.	14. $-21 - 20i$.
15. $\sqrt{5} + i\sqrt{2}$.	16. $\sqrt{7} - i$.	17. $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i$.
18. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$.	19. $\frac{1}{6} - \frac{1}{12}i$.	20. $-\frac{1}{15} + \frac{1}{6}i$.

Reducir a la forma rectangular (es decir, la forma $a + bi$):

21. 10(cos 60 gr. + i sen 60 gr.). 22. 8(cos 30 gr. + i sen 30 gr.).
23. 6(cos 45 gr. + i sen 45 gr.).
24. 5(cos 225 gr. + i sen 225 gr.).
25. 4(cos 135 gr. + i sen 135 gr.).
26. 2(cos 120 gr. + i sen 120 gr.).
27. $\sqrt{2}$ (cos 315 gr. + i sen 315 gr.).
28. $\sqrt{3}$ (cos 300 gr. + i sen 300 gr.).
29. cos(−60 gr.) + i sen (−60 gr.).
30. 3(cos 90 gr. + i sen 90 gr.).
31. 5(cos 270 gr. + i sen 270 gr.). 32. 6(cos 240 gr. + i sen 240 gr.).
33. 100(cos 100 gr. + i sen 300 gr.).
34. 12(cos 256 gr. + i sen 256 gr.).
35. 9(cos 128 gr. + i sen 128 gr.).
36. 5(cos 500 gr. + i sen 500 gr.).
37. 20(cos 180 gr. + i sen 180 gr.).
38. 15(cos 345 gr. + i sen 345 gr.).

12.7. Multiplicación y división de números complejos en la forma trigonométrica.

Los números complejos expresados en forma trigonométrica pueden multiplicarse por medio de una fórmula muy sencilla. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} & r_1(\cos A_1 + i \operatorname{sen} A_1) \cdot r_2(\cos A_2 + i \operatorname{sen} A_2) \\ &= r_1 r_2[\cos A_1 \cos A_2 - \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 + i(\operatorname{sen} A_1 \cos A_2 \\ &\qquad + \cos A_1 \operatorname{sen} A_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos (A_1 + A_2) + i \operatorname{sen} (A_1 + A_2)]. \qquad (1) \end{aligned}$$

Es decir que, el producto de dos números complejos es un número complejo cuyo valor absoluto es el producto de sus valores absolutos y cuya amplitud es la suma de sus amplitudes.

La división es el contrario de la multiplicación y puede demostrarse con facilidad que, a la inversa, el cociente de dos números complejos

Notar que $A = y/x$. Para A escogemos generalmente el ángulo más pequeño que satisfaga la relación 0 grado $\leqq A < 360$ grados.

Gráf. 12.3.

La definición del valor absoluto de un número complejo es consistente con la que se dio para el valor absoluto de un número real (ver número 1.4.). Porque, cuando $x + yi$ es real, y es cero y $\sqrt{x^2 + y^2}$ se transforma en $\sqrt{x^2}$, que es igual a $|x|$. El valor obsoluto de $x + yi$, exactamente $\sqrt{x^2 + y^2}$, se escribe también $|x + yi|$.

EJERCICIOS XII. D **

Reducir a la forma trigonométrica:

1. $-5 + 5i$.

Solución.

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$\tan A = \frac{5}{-5} = -1, \qquad A = 135 \text{ grados}.$$

$$-5 + 5i = 5\sqrt{2}\,(\cos 135 \text{ gr.} + i \text{ sen } 135 \text{ gr.}).$$

(Se aconseja al estudiante que sitúe el punto como una ayuda para determinar el ángulo.)

2. $3 + 4i$.

Solución.

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\tan A = \frac{4}{3} = 1.3333,$$

$$A = 53.1 \text{ grados (de las tablas trigonométricas)}.$$

$$3 + 4i = 5(\cos 53.1 \text{ grados} + i \text{ sen } 53.1 \text{ grados}).$$

3. $7 + 7i$. 4. $1 - i\sqrt{3}$. 5. $4 + 2i$.

** La Tabla VIII al final de este libro puede emplearse para resolver estos ejercicios.

6. $\sqrt{3} - i$.	7. $-6 - 6\sqrt{3}\ i$.	8. -4.
9. $8i$.	10. $12 - 5i$.	11. $-8 + 15i$.
12. $7 + 24i$.	13. $-9 - 9i$.	14. $-21 - 20i$.
15. $\sqrt{5} + i\sqrt{2}$.	16. $\sqrt{7} - i$.	17. $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i$.
18. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.	19. $\frac{1}{5} - \frac{1}{12}i$.	20. $-\frac{1}{15} + \frac{1}{6}i$.

Reducir a la forma rectangular (es decir, la forma $a + bi$):

21. $10(\cos 60 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 60 \text{ gr.})$. 22. $8(\cos 30 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 30 \text{ gr.})$.
23. $6(\cos 45 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 45 \text{ gr.})$.
24. $5(\cos 225 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 225 \text{ gr.})$.
25. $4(\cos 135 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 135 \text{ gr.})$.
26. $2(\cos 120 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 120 \text{ gr.})$.
27. $\sqrt{2}\ (\cos 315 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 315 \text{ gr.})$.
28. $\sqrt{3}\ (\cos 300 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 300 \text{ gr.})$.
29. $\cos(-60 \text{ gr.}) + i \operatorname{sen}(-60 \text{ gr.})$.
30. $3(\cos 90 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 90 \text{ gr.})$.
31. $5(\cos 270 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 270 \text{ gr.})$. 32. $6(\cos 240 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 240 \text{ gr.})$.
33. $100(\cos 100 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 300 \text{ gr.})$.
34. $12(\cos 256 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 256 \text{ gr.})$.
35. $9(\cos 128 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 128 \text{ gr.})$.
36. $5(\cos 500 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 500 \text{ gr.})$.
37. $20(\cos 180 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 180 \text{ gr.})$.
38. $15(\cos 345 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 345 \text{ gr.})$.

12.7. Multiplicación y división de números complejos en la forma trigonométrica.

Los números complejos expresados en forma trigonométrica pueden multiplicarse por medio de una fórmula muy sencilla. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} & r_1(\cos A_1 + i \operatorname{sen} A_1) \cdot r_2(\cos A_2 + i \operatorname{sen} A_2) \\ &= r_1 r_2[\cos A_1 \cos A_2 - \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 + i(\operatorname{sen} A_1 \cos A_2 \\ &\qquad + \cos A_1 \operatorname{sen} A_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos (A_1 + A_2) + i \operatorname{sen} (A_1 + A_2)]. \qquad (1) \end{aligned}$$

Es decir que, el producto de dos números complejos es un número complejo cuyo valor absoluto es el producto de sus valores absolutos y cuya amplitud es la suma de sus amplitudes.

La división es el contrario de la multiplicación y puede demostrarse con facilidad que, a la inversa, el cociente de dos números complejos

es un número complejo cuyo valor absoluto es el valor
videndo dividido por el valor absoluto del divisor y cuy
amplitud del dividendo menos la amplitud del diviso

$$\frac{r_1(\cos A_1 + i \text{ sen } A_1)}{r_2(\cos A_2 + i \text{ sen } A_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos (A_1 - A_2) + i \text{ sen } (A$$

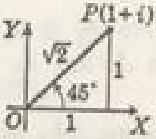
EJERCICIOS XII. E

Resolver las operaciones indicadas, reduciendo prin
trigonométrica cualquier número que no esté ya expresado

1. $2(\cos 25 \text{ gr.} + i \text{ sen } 25 \text{ gr.}) \cdot 5(\cos 75 \text{ gr.} + i \text{ sen}$
2. $8(\cos 18 \text{ gr.} + i \text{ sen } 18 \text{ gr.}) \cdot 6(\cos 24 \text{ gr.} + i \text{ sen}$
3. $15(\cos 140 \text{ gr.} + i \text{ sen } 140 \text{ gr.}) \cdot 4(\cos 280 \text{ gr.} + i$
4. $(1 + i\sqrt{3})(4 + 4i)$. 5. $(6 - 6i)(-7$
6. $2(\cos 15 \text{ gr.} + i \text{ sen } 15 \text{ gr.}) \cdot 3(\cos 70 \text{ gr.} + i \text{ se}$ $\cdot 4(\cos 65 \text{ gr.} + i \text{ sen } 65 \text{ gr.})$.
7. $10(\cos 125 \text{ gr.} + i \text{ sen } 125 \text{ gr.}) \div 5(\cos 85 \text{ gr.} + i$
8. $3(\cos 130 \text{ gr.} + i \text{ sen } 130 \text{ gr.}) \div 6(\cos 217 \text{ gr.} + i$
9. $\frac{1}{2}(\cos 250 \text{ gr.} + i \text{ sen } 250 \text{ gr.}) \div \frac{1}{4}(\cos 140 \text{ gr.} + i$
10. $(4 + 4\sqrt{3} \cdot i) \div (6 - 6i)$.
11. $(1 - i) \div (1 + i)$.
12. $(-\sqrt{3} + 3i) \div (\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \cdot i)$.
13. $(6\sqrt{3} - 6i) \div (\sqrt{2} + i\sqrt{6})$.

12.8. Potencias de números complejos.

La elevación a una potencia es un caso especial d
y se deduce por la aplicación repetida de (1) de la secc



GRÁF. 12.4.

$$[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^n = r^n(\cos nA + i \text{ s}$$

donde n es una integrante positiva.

La relación (1) se conoce como el *Teorema de De*

Ejemplo.

Dar el valor de $(1 + i)^5$.

Solución. Localizar el número $1 + i$ (ver Gráf. 12.4.). El valor absoluto es $\sqrt{2}$ y la amplitud es 45 grados.

$$
\begin{aligned}
(1 + i)^5 &= [\sqrt{2}\ (\cos 45 \text{ gr.} + i \text{ sen } 45 \text{ gr.})]^5 \\
&= 4\sqrt{2}\ (\cos 5 \cdot 45 \text{ gr.} + i \text{ sen } 5 \cdot 45 \text{ gr.}) \\
&= 4\sqrt{2}\ (\cos 225 \text{ gr.} + i \text{ sen } 225 \text{ gr.}) = 4(-1 - i).
\end{aligned}
$$

El estudiante puede revisar este resultado por expansión de $(1 + i)^5$ por el teorema binomial.

12.9. Raíces de números complejos.

Para comprobar el Teorema de De Moivre en el caso en que el exponente es la recíproca de una integrante positiva, considere la expresión

$$[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^{1/n} = r^{1/n}(\cos A + i \text{ sen } A)^{1/n}. \quad (1)$$

Que $A = nB$. Entonces el lado derecho de (1) se reduce a

$$
\begin{aligned}
r^{1/n}(\cos nB + i \text{ sen } nB)^{1/n} &= r^{1/n}[(\cos B + i \text{ sen } B)^n]^{1/n} \\
&= r^{1/n}(\cos B + i \text{ sen } B),
\end{aligned}
$$

o

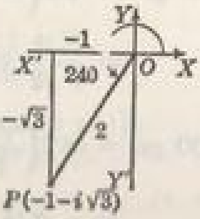
$$[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos \frac{A}{n} + i \text{ sen } \frac{A}{n}\right). \quad (2)$$

Puesto que para cualquier número entero k,

$$\cos (A + k \cdot 360 \text{ gr.}) = \cos A, \quad \text{sen } (A + k \cdot 360 \text{ gr.}) = \text{sen } A,$$

tenemos de la misma manera

$$
\begin{aligned}
&[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^{1/n} \\
&\quad = [r\{\cos (A + k : 360 \text{ gr.}) + i \text{ sen } (A + k : 360 \text{ gr.}\}]^{1/n}
\end{aligned}
$$



Gráf. 12.5.

es un número complejo cuyo valor absoluto es el valor absoluto del dividendo dividido por el valor absoluto del divisor y cuya amplitud es la amplitud del dividendo menos la amplitud del divisor. Es decir que,

$$\frac{r_1(\cos A_1 + i \text{ sen } A_1)}{r_2(\cos A_2 + i \text{ sen } A_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(A_1 - A_2) + i \text{ sen }(A_1 - A_2)]. \quad (2)$$

EJERCICIOS XII. E

Resolver las operaciones indicadas, reduciendo primero a su forma trigonométrica cualquier número que no esté ya expresado de esta manera:

1. $2(\cos 25 \text{ gr.} + i \text{ sen } 25 \text{ gr.}) \cdot 5(\cos 75 \text{ gr.} + i \text{ sen } 75 \text{ gr.})$.
2. $8(\cos 18 \text{ gr.} + i \text{ sen } 18 \text{ gr.}) \cdot 6(\cos 24 \text{ gr.} + i \text{ sen } 24 \text{ gr.})$.
3. $15(\cos 140 \text{ gr.} + i \text{ sen } 140 \text{ gr.}) \cdot 4(\cos 280 \text{ gr.} + i \text{ sen } 280 \text{ gr.})$.
4. $(1 + i\sqrt{3})(4 + 4i)$.
5. $(6 - 6i)(-7 + 7\sqrt{3} \cdot i)$.
6. $2(\cos 15 \text{ gr.} + i \text{ sen } 15 \text{ gr.}) \cdot 3(\cos 70 \text{ gr.} + i \text{ sen } 70 \text{ gr.}) \cdot 4(\cos 65 \text{ gr.} + i \text{ sen } 65 \text{ gr.})$.
7. $10(\cos 125 \text{ gr.} + i \text{ sen } 125 \text{ gr.}) \div 5(\cos 85 \text{ gr.} + i \text{ sen } 85 \text{ gr.})$.
8. $3(\cos 130 \text{ gr.} + i \text{ sen } 130 \text{ gr.}) \div 6(\cos 217 \text{ gr.} + i \text{ sen } 217 \text{ gr.})$.
9. $\frac{1}{2}(\cos 250 \text{ gr.} + i \text{ sen } 250 \text{ gr.}) \div \frac{1}{4}(\cos 140 \text{ gr.} + i \text{ sen } 140 \text{ gr.})$.
10. $(4 + 4\sqrt{3} \cdot i) \div (6 - 6i)$.
11. $(1 - i) \div (1 + i)$.
12. $(-\sqrt{3} + 3i) \div (\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \cdot i)$.
13. $(6\sqrt{3} - 6i) \div (\sqrt{2} + i\sqrt{6})$.

12.8. Potencias de números complejos.

La elevación a una potencia es un caso especial de multiplicación y se deduce por la aplicación repetida de (1) de la sección anterior que

GRÁF. 12.4.

$$[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^n = r^n(\cos nA + i \text{ sen } nA), \quad (1)$$

donde n es una integrante positiva.

La relación (1) se conoce como el *Teorema de De Moivre*.

Ejemplo.

Dar el valor de $(1 + i)^5$.

Solución. Localizar el número $1 + i$ (ver Gráf. 12.4.). El valor absoluto es $\sqrt{2}$ y la amplitud es 45 grados.

$$\begin{aligned}(1 + i)^5 &= [\sqrt{2}\ (\cos 45 \text{ gr.} + i \text{ sen } 45 \text{ gr.})]^5 \\ &= 4\sqrt{2}\ (\cos 5 \cdot 45 \text{ gr.} + i \text{ sen } 5 \cdot 45 \text{ gr.}) \\ &= 4\sqrt{2}\ (\cos 225 \text{ gr.} + i \text{ sen } 225 \text{ gr.}) = 4(-1 - i).\end{aligned}$$

El estudiante puede revisar este resultado por expansión de $(1 + i)^5$ por el teorema binomial.

12.9. Raíces de números complejos.

Para comprobar el Teorema de De Moivre en el caso en que el exponente es la recíproca de una integrante positiva, considere la expresión

$$[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^{1/n} = r^{1/n}(\cos A + i \text{ sen } A)^{1/n}. \qquad (1)$$

Que $A = nB$. Entonces el lado derecho de (1) se reduce a

$$\begin{aligned}r^{1/n}(\cos nB + i \text{ sen } nB)^{1/n} &= r^{1/n}[(\cos B + i \text{ sen } B)^n]^{1/n} \\ &= r^{1/n}(\cos B + i \text{ sen } B),\end{aligned}$$

o

$$[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos \frac{A}{n} + i \text{ sen } \frac{A}{n}\right). \qquad (2)$$

Puesto que para cualquier número entero k,

$$\cos (A + k \cdot 360 \text{ gr.}) = \cos A, \quad \text{sen } (A + k \cdot 360 \text{ gr.}) = \text{sen } A,$$

tenemos de la misma manera

$$\begin{aligned}&[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^{1/n} \\ &\quad = [r\{\cos (A + k : 360 \text{ gr.}) + i \text{ sen } (A + k : 360 \text{ gr.}\}]^{1/n}\end{aligned}$$

Gráf. 12.5.

es un número complejo cuyo valor absoluto es el valor absoluto del dividendo dividido por el valor absoluto del divisor y cuya amplitud es la amplitud del dividendo menos la amplitud del divisor. Es decir que,

$$\frac{r_1(\cos A_1 + i \text{ sen } A_1)}{r_2(\cos A_2 + i \text{ sen } A_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos (A_1 - A_2) + i \text{ sen } (A_1 - A_2)]. \quad (2)$$

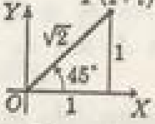
EJERCICIOS XII. E

Resolver las operaciones indicadas, reduciendo primero a su forma trigonométrica cualquier número que no esté ya expresado de esta manera:

1. $2(\cos 25 \text{ gr.} + i \text{ sen } 25 \text{ gr.}) \cdot 5(\cos 75 \text{ gr.} + i \text{ sen } 75 \text{ gr.})$.
2. $8(\cos 18 \text{ gr.} + i \text{ sen } 18 \text{ gr.}) \cdot 6(\cos 24 \text{ gr.} + i \text{ sen } 24 \text{ gr.})$.
3. $15(\cos 140 \text{ gr.} + i \text{ sen } 140 \text{ gr.}) \cdot 4(\cos 280 \text{ gr.} + i \text{ sen } 280 \text{ gr.})$.
4. $(1 + i\sqrt{3})(4 + 4i)$.
5. $(6 - 6i)(-7 + 7\sqrt{3} \cdot i)$.
6. $2(\cos 15 \text{ gr.} + i \text{ sen } 15 \text{ gr.}) \cdot 3(\cos 70 \text{ gr.} + i \text{ sen } 70 \text{ gr.}) \cdot 4(\cos 65 \text{ gr.} + i \text{ sen } 65 \text{ gr.})$.
7. $10(\cos 125 \text{ gr.} + i \text{ sen } 125 \text{ gr.}) \div 5(\cos 85 \text{ gr.} + i \text{ sen } 85 \text{ gr.})$.
8. $3(\cos 130 \text{ gr.} + i \text{ sen } 130 \text{ gr.}) \div 6(\cos 217 \text{ gr.} + i \text{ sen } 217 \text{ gr.})$.
9. $\frac{1}{2}(\cos 250 \text{ gr.} + i \text{ sen } 250 \text{ gr.}) \div \frac{1}{4}(\cos 140 \text{ gr.} + i \text{ sen } 140 \text{ gr.})$.
10. $(4 + 4\sqrt{3} \cdot i) \div (6 - 6i)$.
11. $(1 - i) \div (1 + i)$.
12. $(-\sqrt{3} + 3i) \div (\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \cdot i)$.
13. $(6\sqrt{3} - 6i) \div (\sqrt{2} + i\sqrt{6})$.

12.8. Potencias de números complejos.

La elevación a una potencia es un caso especial de multiplicación y se deduce por la aplicación repetida de (1) de la sección anterior que



GRÁF. 12.4.

$$[r(\cos A + i \text{ sen } A)]^n = r^n(\cos nA + i \text{ sen } nA), \quad (1)$$

donde n es una integrante positiva.

La relación (1) se conoce como el *Teorema de De Moivre.*

Ejemplo.

Dar el valor de $(1 + i)^5$.

SOLUCIÓN. Localizar el número $1 + i$ (ver Gráf. 12.4.). El valor absoluto es $\sqrt{2}$ y la amplitud es 45 grados.

$$\begin{aligned}(1 + i)^5 &= [\sqrt{2}\ (\cos 45 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 45 \text{ gr.})]^5 \\ &= 4\sqrt{2}\ (\cos 5 \cdot 45 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 5 \cdot 45 \text{ gr.}) \\ &= 4\sqrt{2}\ (\cos 225 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 225 \text{ gr.}) = 4(-1 - i).\end{aligned}$$

El estudiante puede revisar este resultado por expansión de $(1 + i)^5$ por el teorema binomial.

12.9. Raíces de números complejos.

Para comprobar el Teorema de De Moivre en el caso en que el exponente es la recíproca de una integrante positiva, considere la expresión

$$[r(\cos A + i \operatorname{sen} A)]^{1/n} = r^{1/n}(\cos A + i \operatorname{sen} A)^{1/n}. \quad (1)$$

Que $A = nB$. Entonces el lado derecho de (1) se reduce a

$$\begin{aligned} r^{1/n}(\cos nB + i \operatorname{sen} nB)^{1/n} &= r^{1/n}[(\cos B + i \operatorname{sen} B)^n]^{1/n} \\ &= r^{1/n}(\cos B + i \operatorname{sen} B),\end{aligned}$$

o

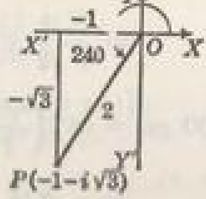
$$[r(\cos A + i \operatorname{sen} A)]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos \frac{A}{n} + i \operatorname{sen} \frac{A}{n}\right). \quad (2)$$

Puesto que para cualquier número entero k,

$$\cos (A + k \cdot 360 \text{ gr.}) = \cos A, \quad \operatorname{sen} (A + k \cdot 360 \text{ gr.}) = \operatorname{sen} A,$$

tenemos de la misma manera

$$\begin{aligned}&[r(\cos A + i \operatorname{sen} A)]^{1/n} \\ &\quad = [r\{\cos (A + k : 360 \text{ gr.}) + i \operatorname{sen} (A + k : 360 \text{ gr.}\}]^{1/n}\end{aligned}$$



GRÁF. 12.5.

$$= r^{1/n}\left(\frac{A + k \cdot 360 \text{ gr.}}{n} + i \text{ sen } \frac{A + k \cdot}{n}\right.$$

Así, dando a k los valores integrales de 0 a n — tenemos n raíces distintas del número $r(\cos A + i$ s a k cualquier otro valor integral positivo obtenemos u n ya obtenidos. Por lo tanto cualquier número compl sen A) diferente de cero, tiene exactamente n distint

Ejemplo.

Dar las cuartas raíces de $-1 - i\sqrt{3}$.

Solución. Fijar el número $-1 - i\sqrt{3}$ y notar q

$$-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 240 \text{ gr.} + i \text{ sen } 24$$

$$(-1 - i\sqrt{3})^{1/4}$$

$$= 2^{1/4}\left(\cos \frac{240 \text{ gr.} + k \cdot 360 \text{ gr.}}{4} + i \text{ sen } \frac{240 \text{ gr.} +}{}\right.$$

$$= \sqrt[4]{2}[\cos (60 \text{ gr.} + k \cdot 90 \text{ gr.} + i \text{ sen } (60 \text{ gr.} + k$$

Dando a k sucesivamente los valores 0, 1, 2, 3, enco las cuatro distintas cuartas raíces de $-1 - i\sqrt{3}$:

$$\sqrt[4]{2}(\cos 60 \text{ gr.} + i \text{ sen } 60 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} + \frac{i}{2}\sqrt[4]{18},$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos 150 \text{ gr.} + i \text{ sen } 150 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt[4]{18} + \frac{i}{2}\sqrt[4]{}$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos 240 \text{ gr.} + i \text{ sen } 240 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$$

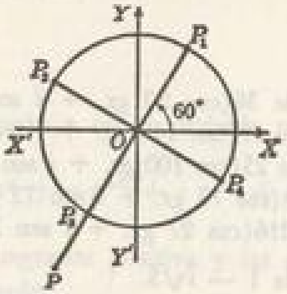
$$= -\frac{1}{2}\sqrt[4]{2} - \frac{i}{2}\sqrt[4]{1}$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos 330 \text{ gr.} + i \text{ sen } 330 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[4]{18} - \frac{i}{2}\sqrt[4]{2}.$$

En la Gráfica 12.6, el punto P representa el número complejo $2(\cos 240 \text{ gr.} + i \text{ sen } 240 \text{ gr.})$; P_1, P_2, P_3, P_4 representan las cuatro raíces cuyas amplitudes son 60, 150, 240 y 330 grados respectivamente.

Notar que las raíces pueden encontrarse gráficamente de la manera siguiente: Dibujar un círculo con centro en el origen y con un radio



GRÁF. 12.6.

igual a la cuarta raíz numérica del valor absoluto del número cuyas cuartas raíces deben encontrarse; es decir, un radio igual a $\sqrt[4]{2}$. Tomar una cuarta parte de la amplitud del número original ($\frac{1}{4} \cdot 240 \text{ gr.} = 60 \text{ gr.}$). Esto localiza el punto P_1 en el círculo, Las cuatro raíces se encuentran en el círculo y espaciadas a intervalos regulares de 90 grados. Así, podemos encontrar P_2, P_3 y P_4.

En general, las n^{as} raíces del número complejo $r(\cos A + i \text{ sen } A)$ pueden encontrarse de la manera siguiente: Dibujar un círculo cuyo centro es el origen y cuyo radio es la n^a raíz numérica de r; dividir el ángulo A por n, el índice de la raíz. Dividir ahora la circunferencia del círculo, desde A/n hasta $A/n + 360$ grados, en n partes iguales. Los n puntos de la división serán las raíces requeridas.

EJERCICIOS XII. F

Emplear el Teorema de De Moivre para elevar a las potencias indicadas:

1. $[4(\cos 12 \text{ gr.} + i \text{ sen } 12 \text{ gr.})]^3$.
2. $[3(\cos 18 \text{ gr.} + i \text{ sen } 18 \text{ gr.})]^4$.
3. $[\sqrt{3} (\cos 25 \text{ gr.} + i \text{ sen } 25 \text{ gr.})]^6$.
4. $[2(\cos 20 \text{ gr.} + i \text{ sen } 20 \text{ gr.})]^9$.
5. $(1 - i)^{10}$.
6. $(1 + i\sqrt{3})^6$.
7. $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$.
8. $(\sqrt{3} - i)^{20}$.

$$= r^{1/n}\left(\frac{A + k \cdot 360 \text{ gr.}}{n} + i \operatorname{sen} \frac{A + k \cdot 360 \text{ gr.}}{n}\right). \quad (3)$$

Así, dando a k los valores integrales de 0 a $n - 1$ inclusive, obtenemos n raíces distintas del número $r(\cos A + i \operatorname{sen} A)$. Si damos a k cualquier otro valor integral positivo obtenemos uno de los números n ya obtenidos. Por lo tanto cualquier número complejo r ($\cos A + i \operatorname{sen} A$) diferente de cero, tiene exactamente n distintas n^{as} raíces.

Ejemplo.

Dar las cuartas raíces de $-1 - i\sqrt{3}$.

Solución. Fijar el número $-1 - i\sqrt{3}$ y notar que

$$-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 240 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 240 \text{ gr.}),$$

$$(-1 - i\sqrt{3})^{1/4}$$

$$= 2^{1/4}\left(\cos \frac{240 \text{ gr.} + k \cdot 360 \text{ gr.}}{4} + i \operatorname{sen} \frac{240 \text{ gr.} + k \cdot 360 \text{ gr.}}{4}\right)$$

$$= \sqrt[4]{2}[\cos (60 \text{ gr.} + k \cdot 90 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} (60 \text{ gr.} + k \cdot 90 \text{ gr.})].$$

Dando a k sucesivamente los valores 0, 1, 2, 3, encontramos que para las cuatro distintas cuartas raíces de $-1 - i\sqrt{3}$:

$$\sqrt[4]{2}(\cos 60 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 60 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} + \frac{i}{2}\sqrt[4]{18},$$

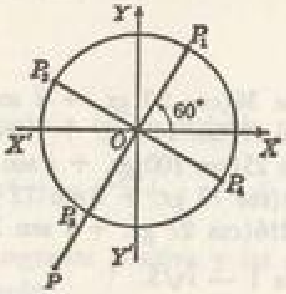
$$\sqrt[4]{2}(\cos 150 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 150 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt[4]{18} + \frac{i}{2}\sqrt[4]{2},$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos 240 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 240 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt[4]{2} - \frac{i}{2}\sqrt[4]{18},$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos 330 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 330 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt[4]{18} - \frac{i}{2}\sqrt[4]{2}.$$

En la Gráfica 12.6, el punto P representa el número complejo $2(\cos 240 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 240 \text{ gr.})$; P_1, P_2, P_3, P_4 representan las cuatro raíces cuyas amplitudes son 60, 150, 240 y 330 grados respectivamente.

Notar que las raíces pueden encontrarse gráficamente de la manera siguiente: Dibujar un círculo con centro en el origen y con un radio



GRÁF. 12.6.

igual a la cuarta raíz numérica del valor absoluto del número cuyas cuartas raíces deben encontrarse; es decir, un radio igual a $\sqrt[4]{2}$. Tomar una cuarta parte de la amplitud del número original ($\frac{1}{4} \cdot 240 \text{ gr.} = 60$ gr.). Esto localiza el punto P_1 en el círculo, Las cuatro raíces se encuentran en el círculo y espaciadas a intervalos regulares de 90 grados. Así, podemos encontrar P_2, P_3 y P_4.

En general, las n^{as} raíces del número complejo $r(\cos A + i \operatorname{sen} A)$ pueden encontrarse de la manera siguiente: Dibujar un círculo cuyo centro es el origen y cuyo radio es la n^a raíz numérica de r; dividir el ángulo A por n, el índice de la raíz. Dividir ahora la circunferencia del círculo, desde A/n hasta $A/n + 360$ grados, en n partes iguales. Los n puntos de la división serán las raíces requeridas.

EJERCICIOS XII. F

Emplear el Teorema de De Moivre para elevar a las potencias indicadas:

1. $[4(\cos 12 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 12 \text{ gr.})]^5$.
2. $[3(\cos 18 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 18 \text{ gr.})]^5$.
3. $[\sqrt{3} (\cos 25 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 25 \text{ gr.})]^8$.
4. $[2(\cos 20 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 20 \text{ gr.})]^6$.
5. $(1 - i)^{10}$.
6. $(1 + i\sqrt{3})^8$.
7. $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$.
8. $(\sqrt{3} - i)^{10}$.

$$= r^{1/n}\left(\frac{A + k \cdot 360 \text{ gr.}}{n} + i \operatorname{sen} \frac{A + k \cdot 360 \text{ gr.}}{n}\right). \quad (3)$$

Así, dando a k los valores integrales de 0 a $n - 1$ inclusive, obtenemos n raíces distintas del número $r(\cos A + i \operatorname{sen} A)$. Si damos a k cualquier otro valor integral positivo obtenemos uno de los números n ya obtenidos. Por lo tanto cualquier número complejo r $(\cos A + i \operatorname{sen} A)$ diferente de cero, tiene exactamente n distintas n^{as} raíces.

Ejemplo.

Dar las cuartas raíces de $-1 - i\sqrt{3}$.

Solución. Fijar el número $-1 - i\sqrt{3}$ y notar que

$$-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 240 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 240 \text{ gr.}),$$

$$(-1 - i\sqrt{3})^{1/4}$$

$$= 2^{1/4}\left(\cos \frac{240 \text{ gr.} + k \cdot 360 \text{ gr.}}{4} + i \operatorname{sen} \frac{240 \text{ gr.} + k \cdot 360 \text{ gr.}}{4}\right)$$

$$= \sqrt[4]{2}[\cos (60 \text{ gr.} + k \cdot 90 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} (60 \text{ gr.} + k \cdot 90 \text{ gr.})].$$

Dando a k sucesivamente los valores 0, 1, 2, 3, encontramos que para las cuatro distintas cuartas raíces de $-1 - i\sqrt{3}$:

$$\sqrt[4]{2}(\cos 60 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 60 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} + \frac{i}{2}\sqrt[4]{18},$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos 150 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 150 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt[4]{18} + \frac{i}{2}\sqrt[4]{2},$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos 240 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 240 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

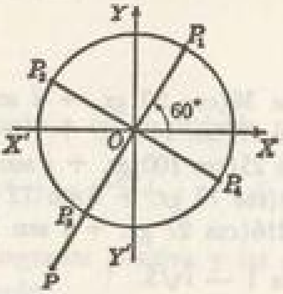
$$= -\frac{1}{2}\sqrt[4]{2} - \frac{i}{2}\sqrt[4]{18},$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos 330 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 330 \text{ gr.} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[4]{18} - \frac{i}{2}\sqrt[4]{2}.$$

En la Gráfica 12.6, el punto P representa el número complejo $2(\cos 240 \text{ gr.} + i \text{ sen } 240 \text{ gr.})$; P_1, P_2, P_3, P_4 representan las cuatro raíces cuyas amplitudes son 60, 150, 240 y 330 grados respectivamente.

Notar que las raíces pueden encontrarse gráficamente de la manera siguiente: Dibujar un círculo con centro en el origen y con un radio



GRÁF. 12.6.

igual a la cuarta raíz numérica del valor absoluto del número cuyas cuartas raíces deben encontrarse; es decir, un radio igual a $\sqrt[4]{2}$. Tomar una cuarta parte de la amplitud del número original ($\frac{1}{4} \cdot 240$ gr. $= 60$ gr.). Esto localiza el punto P_1 en el círculo, Las cuatro raíces se encuentran en el círculo y espaciadas a intervalos regulares de 90 grados. Así, podemos encontrar P_2, P_3 y P_4.

En general, las n^{as} raíces del número complejo $r(\cos A + i \text{ sen } A)$ pueden encontrarse de la manera siguiente: Dibujar un círculo cuyo centro es el origen y cuyo radio es la n^a raíz numérica de r; dividir el ángulo A por n, el índice de la raíz. Dividir ahora la circunferencia del círculo, desde A/n hasta $A/n + 360$ grados, en n partes iguales. Los n puntos de la división serán las raíces requeridas.

EJERCICIOS XII. F

Emplear el Teorema de De Moivre para elevar a las potencias indicadas:

1. $[4(\cos 12 \text{ gr.} + i \text{ sen } 12 \text{ gr.})]^5$.
2. $[3(\cos 18 \text{ gr.} + i \text{ sen } 18 \text{ gr.})]^4$.
3. $[\sqrt{3}\ (\cos 25 \text{ gr.} + i \text{ sen } 25 \text{ gr.})]^8$.
4. $[2(\cos 20 \text{ gr.} + i \text{ sen } 20 \text{ gr.})]^6$.
5. $(1 - i)^{10}$.
6. $(1 + i\sqrt{3})^8$.
7. $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$.
8. $(\sqrt{3} - i)^{10}$.

9. $[5(\cos 16 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 16 \text{ gr.})]^{-4}$.

10. $[\sqrt{7}\ (\cos 7 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 7 \text{ gr.})]^{-7}$.

11. $[\cos(-10 \text{ gr.}) + i \operatorname{sen}(-10 \text{ gr.})]^{9}$.

12. $(\cos 10 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 10 \text{ gr.})^{-9}$.

13. $(\sqrt{3} + i)^{-10}$.

14. $(-1 - i)^{-12}$

Dar todas las

15. Raíces cuadradas de $36(\cos 50 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 50$

16. Raíces cuadradas de $49(\cos 140 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 140$

17. Raíces cuadradas de $25(\cos 100 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 100$

18. Raíces cúbicas de $8(\cos 72 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 72 \text{ gr.})$.

19. Raíces cúbicas de $216(\cos 27 \text{ gr.} + i \operatorname{sen} 27 \text{ gr.})$

20. Raíces cuadradas de $1 - i\sqrt{3}$.

21. Raíces cúbicas de $1 - i\sqrt{3}$.

22. Raíces cuadradas de $-1 - i\sqrt{3}$.

23. Raíces cúbicas de 1.

Sugestión. $1 = \cos 0 \text{ gr.} + i \sin 0 \text{ gr.}$

24. Raíces cúbicas de 8.

25. Raíces cúbic

26. Raíces cúbicas de i.

27. Raíces cúbic

28. Cuartas raíces de $-5 + 12i$.

29. Quintas raíc

30. Sextas raíces de $-27i$.

31. Quintas raíces de $16\sqrt{2}\ (-1 + i)$.

32. Séptimas raíces de $-\sqrt{3} - i$.

Conseguir todas las raíces de las ecuacion

33. $x^3 - 343 = 0$.

34. $x^3 + 216 =$

35. $x^5 + 1 = 0$.

36. $x^5 - 32 =$

37. $x^7 - 1 = 0$.

38. $x^8 + 16 =$

39. $x^6 - x = 0$.

40. $x^4 + x^2 +$

41. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Sugestión. Multiplicar $x - 1$, resolver sulte, después desechar la raíz extraña $x = 1$.

42. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.

43. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0$.

CAPITULO XIII

Teoría de las ecuaciones

13.1. Polinomios.

El polinomio del grado n en la variable x es la función

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

en la cual n es una integrante positiva y las a son constantes, de los cuales $a_0 \neq 0$. Por ejemplo,

$$2x^5 - 3x^4 + 7x^2 - x + 10$$

es un polinomio del grado 5. El polinomio (1) se llama también una *función racional integral* del grado n (ver núms. 1.13 y 3.1). Cuando establecemos que es igual a cero tenemos una *ecuación integral racional* del grado n. Una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ se llama el *cero* de la función $f(x)$.*

Aunque los coeficientes en (1) pueden ser cualesquiera números complejos, limitaremos esta exposición a los polinomios y a las ecuaciones racionales integrales que tienen coeficientes reales. Sin embargo, en cualquier teorema y su comprobación, los coeficientes pueden ser complejos a menos que se indique de otra manera.

13.2. Teorema del remanente.

Cuando un polinomio $f(x)$ se divide por $x - r$, el remanente es igual al valor del polinomio cuando r se sustituye por x.

Dividir el polinomio por $x - r$ hasta que el remanente, que puede ser cero, sea independiente de x. Indicar el cociente por $Q(x)$ y el remanente por R. Entonces, de acuerdo con el significado de la división

$$f(x) \equiv (x - r)Q(x) + R.$$

* Esta definición no está limitada a las funciones racionales integrales.

9. $[5(\cos 16 \text{ gr.} + i \text{ sen } 16 \text{ gr.})]^{-4}$.

10. $[\sqrt{7}\ (\cos 7 \text{ gr.} + i \text{ sen } 7 \text{ gr.})]^{-7}$.

11. $[\cos(-10 \text{ gr.}) + i \text{ sen } (-10 \text{ gr.})]^{6}$.

12. $(\cos 10 \text{ gr.} + i \text{ sen } 10 \text{ gr.})^{-6}$.

13. $(\sqrt{3} + i)^{-10}$.

14. $(-1 - i)^{-12}$.

Dar todas las

15. Raíces cuadradas de $36(\cos 50 \text{ gr.} + i \text{ sen } 50 \text{ gr.})$.
16. Raíces cuadradas de $49(\cos 140 \text{ gr.} + i \text{ sen } 140 \text{ gr.})$.
17. Raíces cuadradas de $25(\cos 100 \text{ gr.} + i \text{ sen } 100 \text{ gr.})$.
18. Raíces cúbicas de $8(\cos 72 \text{ gr.} + i \text{ sen } 72 \text{ gr.})$.
19. Raíces cúbicas de $216(\cos 27 \text{ gr.} + i \text{ sen } 27 \text{ gr.})$.
20. Raíces cuadradas de $1 - i\sqrt{3}$.
21. Raíces cúbicas de $1 - i\sqrt{3}$.
22. Raíces cuadradas de $-1 - i\sqrt{3}$.
23. Raíces cúbicas de 1.

Sugestión. $1 = \cos 0 \text{ gr.} + i \sin 0 \text{ gr.}$

24. Raíces cúbicas de 8.
25. Raíces cúbicas de -1.
26. Raíces cúbicas de i.
27. Raíces cúbicas de $3 + 4i$.
28. Cuartas raíces de $-5 + 12i$.
29. Quintas raíces de 1.
30. Sextas raíces de $-27i$.
31. Quintas raíces de $16\sqrt{2}\ (-1 + i)$.
32. Séptimas raíces de $-\sqrt{3} - i$.

Conseguir todas las raíces de las ecuaciones siguientes:

33. $x^3 - 343 = 0$.
34. $x^3 + 216 = 0$.
35. $x^5 + 1 = 0$.
36. $x^5 - 32 = 0$.
37. $x^7 - 1 = 0$.
38. $x^8 + 16 = 0$.
39. $x^6 - x = 0$.
40. $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
41. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Sugestión. Multiplicar $x - 1$, resolver la ecuación que resulte, después desechar la raíz extraña $x = 1$.

42. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.
43. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0$.

CAPITULO XIII

Teoría de las ecuaciones

13.1. Polinomios.

El polinomio del grado n en la variable x es la función

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

en la cual n es una integrante positiva y las a son constantes, de los cuales $a_0 \neq 0$. Por ejemplo,

$$2x^5 - 3x^4 + 7x^2 - x + 10$$

es un polinomio del grado 5. El polinomio (1) se llama también una *función racional integral* del grado n (ver núms. 1.13 y 3.1). Cuando establecemos que es igual a cero tenemos una *ecuación integral racional* del grado n. Una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ se llama el *cero* de la función $f(x)$.*

Aunque los coeficientes en (1) pueden ser cualesquiera números complejos, limitaremos esta exposición a los polinomios y a las ecuaciones racionales integrales que tienen coeficientes reales. Sin embargo, en cualquier teorema y su comprobación, los coeficientes pueden ser complejos a menos que se indique de otra manera.

13.2. Teorema del remanente.

Cuando un polinomio $f(x)$ se divide por $x - r$, el remanente es igual al valor del polinomio cuando r se sustituye por x.

Dividir el polinomio por $x - r$ hasta que el remanente, que puede ser cero, sea independiente de x. Indicar el cociente por $Q(x)$ y el remanente por R. Entonces, de acuerdo con el significado de la división

$$f(x) = (x - r)Q(x) + R.$$

* Esta definición no está limitada a las funciones racionales integrales.

9. $[5(\cos 16 \text{ gr.} + i \text{ sen } 16 \text{ gr.})]^{-4}$.

10. $[\sqrt{7}\,(\cos 7 \text{ gr.} + i \text{ sen } 7 \text{ gr.})]^{-7}$.

11. $[\cos(-10 \text{ gr.}) + i \text{ sen }(-10 \text{ gr.})]^{6}$.

12. $(\cos 10 \text{ gr.} + i \text{ sen } 10 \text{ gr.})^{-6}$.

13. $(\sqrt{3} + i)^{-10}$.

14. $(-1 - i)^{-12}$.

Dar todas las

15. Raíces cuadradas de $36(\cos 50 \text{ gr.} + i \text{ sen } 50 \text{ gr.})$.
16. Raíces cuadradas de $49(\cos 140 \text{ gr.} + i \text{ sen } 140 \text{ gr.})$.
17. Raíces cuadradas de $25(\cos 100 \text{ gr.} + i \text{ sen } 100 \text{ gr.})$.
18. Raíces cúbicas de $8(\cos 72 \text{ gr.} + i \text{ sen } 72 \text{ gr.})$.
19. Raíces cúbicas de $216(\cos 27 \text{ gr.} + i \text{ sen } 27 \text{ gr.})$.
20. Raíces cuadradas de $1 - i\sqrt{3}$.
21. Raíces cúbicas de $1 - i\sqrt{3}$.
22. Raíces cuadradas de $-1 - i\sqrt{3}$.
23. Raíces cúbicas de 1.

Sugestión. $1 = \cos 0 \text{ gr.} + i \sin 0 \text{ gr.}$

24. Raíces cúbicas de 8.
25. Raíces cúbicas de -1.
26. Raíces cúbicas de i.
27. Raíces cúbicas de $3 + 4i$.
28. Cuartas raíces de $-5 + 12i$.
29. Quintas raíces de 1.
30. Sextas raíces de $-27i$.
31. Quintas raíces de $16\sqrt{2}\,(-1 + i)$.
32. Séptimas raíces de $-\sqrt{3} - i$.

Conseguir todas las raíces de las ecuaciones siguientes:

33. $x^3 - 343 = 0$.
34. $x^3 + 216 = 0$.
35. $x^5 + 1 = 0$.
36. $x^5 - 32 = 0$.
37. $x^7 - 1 = 0$.
38. $x^8 + 16 = 0$.
39. $x^6 - x = 0$.
40. $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
41. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Sugestión. Multiplicar $x - 1$, resolver la ecuación que resulte, después desechar la raíz extraña $x = 1$.

42. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.
43. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0$.

CAPITULO XIII

Teoría de las ecuaciones

13.1. Polinomios.

El polinomio del grado n en la variable x es la función

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

en la cual n es una integrante positiva y las a son constantes, de los cuales $a_0 \neq 0$. Por ejemplo,

$$2x^5 - 3x^4 + 7x^2 - x + 10$$

es un polinomio del grado 5. El polinomio (1) se llama también una *función racional integral* del grado n (ver núms. 1.13 y 3.1). Cuando establecemos que es igual a cero tenemos una *ecuación integral racional* del grado n. Una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ se llama el *cero* de la función $f(x)$.*

Aunque los coeficientes en (1) pueden ser cualesquiera números complejos, limitaremos esta exposición a los polinomios y a las ecuaciones racionales integrales que tienen coeficientes reales. Sin embargo, en cualquier teorema y su comprobación, los coeficientes pueden ser complejos a menos que se indique de otra manera.

13.2. Teorema del remanente.

Cuando un polinomio $f(x)$ se divide por $x - r$, el remanente es igual al valor del polinomio cuando r se sustituye por x.

Dividir el polinomio por $x - r$ hasta que el remanente, que puede ser cero, sea independiente de x. Indicar el cociente por $Q(x)$ y el remanente por R. Entonces, de acuerdo con el significado de la división

$$f(x) = (x - r)Q(x) + R.$$

* Esta definición no está limitada a las funciones racionales integrales.

Puesto que esto es una identidad en x, se satisface con t
de x y cuando indicamos $x = r$, encontramos que

$$f(r) = (r - r)Q(r) + R = 0 \cdot Q(r) + R$$

Aquí se supone que un polinomio es finito por cada
la variante. Consecuentemente, puesto que $Q(x)$ es un p
es un número finito y $0 \cdot Q(r) = 0$.

Ejemplo.

$$\begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 10 \,(x - 2 \;(= x - r \\ \quad\quad\;\; \underline{2x^3 - 4x^2} \quad\quad\quad\quad\; 2x^2 - x - 3 \;(= \\ \quad\quad\quad\quad - x^2 - x \\ \quad\quad\quad\quad \underline{- x^2 + 2x} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\; - 3x + 10 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\; \underline{- 3x + 6} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 4 \;(= R) \end{array}$$

$$f(r) = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \; 2^2 - 2 + 10 = 2 \cdot 8 -$$
$$= 16 - 20 - 2 + 10 = 4 = R.$$

13.3. Teorema del factor.

Cuando r es una raíz de $f(x) = 0$, entonces $x -$
de $f(x)$.

De acuerdo con el párrafo anterior, el remanente q
dividir $f(x)$ por $x - r$ es $R = f(r)$. Pero $f(r) = 0$,
una raíz de $f(x) = 0$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x - r)Q(x) + R = (x - r)Q$$

o $x - r$ es un factor de $f(x)$.

13.4. Inversa del Teorema del factor.

A la inversa, cuando $x - r$ es un factor de $f(x)$, e
raíz de $f(x) = 0$.

Puesto que $x - r$ es un factor de $f(x)$, podemos

$$f(x) = (x - r)Q(x).$$

Por lo tanto,

$$f(r) = (r - r)Q(r) = 0 \cdot Q(r) =$$

13.5. División sintética.

La división de un polinomio por un binomio del ti
lograrse simplemente y rápidamente por medio de un

división sintética, que ilustraremos con el ejemplo $2x^3 - 3x^2 - 13x + 5 \div x - 3$. Según el proceso ordinario de división larga obtenemos

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 - 3x^2 & - 13x & + 5 & & \underline{x - 3} \\
\underline{2x^3 - 6x^2} & & & & 2x^2 + 3x - 4 \\
3x^2 & - 13x & & & \\
\underline{3x^2} & \underline{- 9x} & & & \\
 & - 4x & + 5 & & \\
 & \underline{- 4x} & \underline{+ 12} & & \\
 & & - 7 & &
\end{array}
$$

Gran parte de lo anterior es completamente superfluo. En primer lugar, no es necesario escribir el primer término de cada línea que tiene que restarse. Omitiendo estos términos y sin bajar los términos del dividendo, tenemos

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 - 3x^2 & - 13x & + 5 & & \underline{x - 3} \\
\underline{- 6x^2} & & & & 2x^2 + 3x - 4 \\
3x^2 & & & & \\
 & \underline{- 9x} & & & \\
 & - 4x & & & \\
 & & \underline{+ 12} & & \\
 & & - 7 & &
\end{array}
$$

En seguida, escribimos solamente los coeficientes,* y los metemos hacia arriba en la forma más compacta que se indica a continuación. El cociente ha sido omitido, puesto que los coeficientes de los términos del cociente, así como el remanente, aparecen en la tercera línea (a condición de bajar el primer coeficiente 2, en esta línea).

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & - 3 & - 13 & + 5 & \underline{1 - 3} \\
 & - 6 & - 9 & + 12 & \\
\hline
2 & + 3 & - 4 & - 7 &
\end{array}
$$

Finalmente, para sustituir la sustracción por adición, volvemos a colocar (en el divisor) -3 por $+3$ y omitimos el 1:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & - 3 & - 13 & + 5 & \underline{3} \\
 & + 6 & - 9 & - 12 & \\
\hline
2 & + 3 & - 4 & (-7) &
\end{array}
$$

Cociente $= 2x^2 + 3x - 4$, remanente $= -7$.

* No es necesario escribir las equis, puesto que la potencia de x está indicada por la posición del coeficiente. El coeficiente que se encuentra lo más alejado a la derecha es el término constante, el que sigue es el coeficiente de x, etc...

Puesto que esto es una identidad en x, se satisface con todos los valores de x y cuando indicamos $x = r$, encontramos que

$$f(r) = (r - r)Q(r) + R = 0 \cdot Q(r) + R = R.$$

Aquí se supone que un polinomio es finito por cada valor finito de la variante. Consecuentemente, puesto que $Q(x)$ es un polinomio, $Q(r)$ es un número finito y $0 \cdot Q(r) = 0$.

Ejemplo.

$$\begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 10(x - 2 \;(= x - r) \\ \quad \underline{2x^3 - 4x^2} \qquad\qquad\quad 2x^2 - x - 3\;(= Q(x)) \\ \qquad\; - x^2 - x \\ \qquad\; \underline{- x^2 + 2x} \\ \qquad\qquad\; - 3x + 10 \\ \qquad\qquad\; \underline{- 3x + 6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 4\;(= R) \end{array}$$

$$f(r) = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 5\ 2^2 - 2 + 10 = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 - 2 + 10$$
$$= 16 - 20 - 2 + 10 = 4 = R.$$

13.3. Teorema del factor.

Cuando r es una raíz de $f(x) = 0$, entonces $x - r$ es un factor de $f(x)$.

De acuerdo con el párrafo anterior, el remanente que se obtiene al dividir $f(x)$ por $x - r$ es $R = f(r)$. Pero $f(r) = 0$, puesto que r es una raíz de $f(x) = 0$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x - r)Q(x) + R = (x - r)Q(x),$$

o $x - r$ es un factor de $f(x)$.

13.4. Inversa del Teorema del factor.

A la inversa, cuando $x - r$ es un factor de $f(x)$, entonces r es una raíz de $f(x) = 0$.

Puesto que $x - r$ es un factor de $f(x)$, podemos escribir

$$f(x) = (x - r)Q(x).$$

Por lo tanto,

$$f(r) = (r - r)Q(r) = 0 \cdot Q(r) = 0.$$

13.5. División sintética.

La división de un polinomio por un binomio del tipo $x - r$ puede lograrse simplemente y rápidamente por medio de un proceso llamado

división sintética, que ilustraremos con el ejemplo $2x^3 - 3x^2 - 13x + 5 \div x - 3$. Según el proceso ordinario de división larga obtenemos

$$
\begin{array}{rrrrl}
2x^3 & -\,3x^2 & -\,13x & +\;5 & \underline{(x-3} \\
\underline{2x^3} & \underline{-\,6x^2} & & & 2x^2 + 3x - 4 \\
 & 3x^2 & -\,13x & & \\
 & \underline{3x^2} & \underline{-\;\;9x} & & \\
 & & -\;\;4x & +\;5 & \\
 & & \underline{-\;\;4x} & \underline{+\;12} & \\
 & & & -\;7 &
\end{array}
$$

Gran parte de lo anterior es completamente superfluo. En primer lugar, no es necesario escribir el primer término de cada línea que tiene que restarse. Omitiendo estos términos y sin bajar los términos del dividendo, tenemos

$$
\begin{array}{rrrrl}
2x^3 & -\,3x^2 & -\,13x & +\;5 & \underline{(x-3} \\
 & \underline{-\,6x^2} & & & 2x^2 + 3x - 4 \\
 & 3x^2 & & & \\
 & & \underline{-\;\;9x} & & \\
 & & -\;\;4x & & \\
 & & & \underline{+\;12} & \\
 & & & -\;7 &
\end{array}
$$

En seguida, escribimos solamente los coeficientes,* y los metemos hacia arriba en la forma más compacta que se indica a continuación. El cociente ha sido omitido, puesto que los coeficientes de los términos del cociente, así como el remanente, aparecen en la tercera línea (a condición de bajar el primer coeficiente 2, en esta línea).

$$
\begin{array}{rrrrl}
2 & -\,3 & -\,13 & +\;5 & \underline{(1-3} \\
 & -\,6 & -\;\;9 & +\,12 & \\
\hline
2 & +\,3 & -\;\;4 & -\;\;7 &
\end{array}
$$

Finalmente, para sustituir la sustracción por adición, volvemos a colocar (en el divisor) -3 por $+3$ y omitimos el 1:

$$
\begin{array}{rrrrl}
2 & -\,3 & -\,13 & +\;5 & (\underline{3} \\
 & +\,6 & -\;\;9 & -\,12 & \\
\hline
2 & +\,3 & -\;\;4 & (-7) &
\end{array}
$$

Cociente $= 2x^2 + 3x - 4$, remanente $= -7$.

* No es necesario escribir las equis, puesto que la potencia de x está indicada por la posición del coeficiente. El coeficiente que se encuentra lo más alejado a la derecha es el término constante, el que sigue es el coeficiente de x, etc...

Puesto que esto es una identidad en x, se satisface con todos los valores de x y cuando indicamos $x = r$, encontramos que

$$f(r) = (r - r)Q(r) + R = 0 \cdot Q(r) + R = R.$$

Aquí se supone que un polinomio es finito por cada valor finito de la variante. Consecuentemente, puesto que $Q(x)$ es un polinomio, $Q(r)$ es un número finito y $0 \cdot Q(r) = 0$.

Ejemplo.

$$\begin{array}{lll}
f(x) = & 2x^3 - 5x^2 - x + 10 & \underline{(x - 2\ (= x - r)} \\
& \underline{2x^3 - 4x^2} & 2x^2 - x - 3\ (= Q\ x)) \\
& \quad -x^2 - x & \\
& \quad \underline{-x^2 + 2x} & \\
& \qquad -3x + 10 & \\
& \qquad \underline{-3x + 6} & \\
& \qquad\qquad 4\ (= R) &
\end{array}$$

$$\begin{aligned} f(r) = f(2) &= 2 \cdot 2^3 - 5\ 2^2 - 2 + 10 = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 - 2 + 10 \\ &= 16 - 20 - 2 + 10 = 4 = R. \end{aligned}$$

13.3. Teorema del factor.

Cuando r es una raíz de $f(x) = 0$, entonces $x - r$ es un factor de $f(x)$.

De acuerdo con el párrafo anterior, el remanente que se obtiene al dividir $f(x)$ por $x - r$ es $R = f(r)$. Pero $f(r) = 0$, puesto que r es una raíz de $f(x) = 0$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x - r)Q(x) + R = (x - r)Q(x),$$

o $x - r$ es un factor de $f(x)$.

13.4. Inversa del Teorema del factor.

A la inversa, cuando $x - r$ es un factor de $f(x)$, entonces r es una raíz de $f(x) = 0$.

Puesto que $x - r$ es un factor de $f(x)$, podemos escribir

$$f(x) = (x - r)Q(x).$$

Por lo tanto,

$$f(r) = (r - r)Q(r) = 0 \cdot Q(r) = 0.$$

13.5. División sintética.

La división de un polinomio por un binomio del tipo $x - r$ puede lograrse simplemente y rápidamente por medio de un proceso llamado

división sintética, que ilustraremos con el ejemplo $2x^3 - 3x^2 - 13x + 5 \div x - 3$. Según el proceso ordinario de división larga obtenemos

$$\begin{array}{rrrrl}
2x^3 - 3x^2 & - 13x & + 5 & & \underline{(x - 3} \\
\underline{2x^3 - 6x^2} & & & & 2x^2 + 3x - 4 \\
3x^2 & - 13x & & & \\
\underline{3x^2} & \underline{- 9x} & & & \\
& - 4x & + 5 & & \\
& \underline{- 4x} & \underline{+ 12} & & \\
& & - 7 & &
\end{array}$$

Gran parte de lo anterior es completamente superfluo. En primer lugar, no es necesario escribir el primer término de cada línea que tiene que restarse. Omitiendo estos términos y sin bajar los términos del dividendo, tenemos

$$\begin{array}{rrrl}
2x^3 - 3x^2 & - 13x & + 5 & \underline{(x - 3} \\
\underline{- 6x^2} & & & 2x^2 + 3x - 4 \\
3x^2 & & & \\
& \underline{- 9x} & & \\
& - 4x & & \\
& & \underline{+ 12} & \\
& & - 7 &
\end{array}$$

En seguida, escribimos solamente los coeficientes,* y los metemos hacia arriba en la forma más compacta que se indica a continuación. El cociente ha sido omitido, puesto que los coeficientes de los términos del cociente, así como el remanente, aparecen en la tercera línea (a condición de bajar el primer coeficiente 2, en esta línea).

$$\begin{array}{l}
2 - 3 - 13 + 5 \quad \underline{(1 - 3} \\
\underline{\quad - 6 - 9 + 12} \\
2 + 3 - 4 - 7
\end{array}$$

Finalmente, para sustituir la sustracción por adición, volvemos a colocar (en el divisor) -3 por $+3$ y omitimos el 1:

$$\begin{array}{l}
2 - 3 - 13 + 5 \quad (\underline{3} \\
\underline{\quad + 6 - 9 - 12} \\
2 + 3 - 4 \quad (-7)
\end{array}$$

Cociente $= 2x^2 + 3x - 4$, remanente $= -7$.

* No es necesario escribir las equis, puesto que la potencia de x está indicada por la posición del coeficiente. El coeficiente que se encuentra lo más alejado a la derecha es el término constante, el que sigue es el coeficiente de x, etc...

REGLA. Para dividir $f(x)$ por $x - r$, arreglar $f(x)$ las potencias descendentes de x, asegurándose de proporcio tencia faltante un cero como su coeficiente. La operació nerse convenientemente en tres líneas.

En la primera línea escribir los coeficientes de $f(x)$ $a_0\ a_1\ a_2 \cdots a_n$. (El cero debe indicarse para cualquier pot

Escribir a_0 en el primer lugar de la tercera línea. Mul colocar el producto en la segunda línea bajo a_1 y sumar, co en la tercera línea. Multiplicar por r, colocar el product línea debajo de a_2 y sumar. Continuar este proceso lo m

La última suma en la tercera línea será el remanent que preceden, leídos de izquierda a derecha, serán los c potencias de x en el cociente, ordenadas de acuerdo con l cendentes de x.

Ejemplo.

Dividir $3x^4 - 5x^2 + x - 20$ por $x + 2$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{array}{l} 3 + 0 - 5 + 1 - 20 \quad (\underline{-2} \\ \quad - 6 + 12 - 14 + 26 \\ \hline 3 - 6 + 7 - 13\ (+6) \end{array}$$

Cociente $= 3x^3 - 6x^2 + 7x - 13$, remanente $= 6$.

EJERCICIOS XIII. A

Emplear la división sintética en los ejercicios siguien

1. $(x^3 + 6x^2 - 7x - 8) \div (x - 2)$.
2. $(x^3 - 4x^2 - 5x - 6) \div (x + 3)$.
3. $(x^3 - 7x^2 + 2x + 4) \div (x - 1)$.
4. $(2x^3 + 10x^2 + 5x + 11) \div (x + 5)$.
5. $(x^3 - 3x^2 - 25x + 12) \div (x + 4)$.
6. $(6x^3 + 12x^2 + x - 20) \div (x + 5)$.
7. $(5x^3 - 6x^2 - 17x - 9) \div (x - 7)$.
8. $(7x^3 - x + 24) \div (x - 6)$.
9. $(x^4 + 4x^3 - 23x^2 + 10x - 12) \div (x - 3)$.
10. $(x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 30x - 63) \div (x - 3)$.
11. $(x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 15x - 4) \div (x + 4)$.
12. $(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$.
13. $(3x^4 + 4x^3 - 7x + 22) \div (x + 5)$.
14. $(4x^4 - 120x^2 + 18x - 720) \div (x - 6)$.
15. $(x^5 + x^3 + x + 1) \div (x + 1)$.
16. $(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) \div (x - \frac{1}{2})$.
17. $(4x^3 - 4x^2 - 11x + 6) \div (x + \frac{3}{2})$.

18. $(3x^3 + 2x^2 - 15x - 10) \div (x - \sqrt{5})$.
19. $(x^3 - 15x^2 + 60x - 46) \div (x - 7 + \sqrt{3})$.

Emplear la división sintética y el teorema del remanente en los ejercicios siguientes:

20. Dado $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 2$; dar $f(3)$, $f(-3)$.
21. Dado $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 6x + 5$; dar $f(x)$, $f(-5)$.
22. Dado $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$; dar $f(4)$, $f(-4)$.
23. Demostrar que $x + 4$ es un factor de $2x^3 + 5x^2 - 32x - 80$.
24. Demostrar que $(x - 2)$ es un factor de $3x^4 - 10x^3 - x^2 + 28x - 20$.

13.6. Localización de los ceros reales de un polinomio.

La división sintética es útil para dibujar un polinomio y, consecuentemente, para localizar sus ceros reales. Por ejemplo, considerando el polinomio

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20.$$

El teorema del remanente nos indica que el remanente que se obtiene al dividir por $x - r$ es $f(r)$. Por medio de la división sintética podemos, entonces, establecer la tabla siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-67	-4	21	20	5	-12	-19	-4	45

Cuando los valores indicados en esta tabla se localizan tenemos una gráfica del polinomio (Gráf. 13.1). Notamos que cruza el eje x entre -2 y -1, entre 1 y 2 entre 4 y 5. Puesto que $f(x) = 0$ donde la gráfica cruza el eje x, hemos localizado tres raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

Hemos empleado aquí los principios generales siguientes, que se aplican a cualquier polinomio $f(x)$:

Principio. Cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces $f(x) = 0$ para cuando menos un valor de x entre a y b. Es decir que hay cuando menos una raíz real de $f(x) = 0$ entre a y b. Este principio depende del hecho que un polinomio es una función *continua* y que su gráfica es una curva continua, lo que quiere decir esencialmente que la gráfica no se compone de partes desconectadas. Cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, los puntos A y B en la gráfica, que corresponden

Regla. Para dividir $f(x)$ por $x - r$, arreglar $f(x)$ de acuerdo con las potencias descendentes de x, asegurándose de proporcionar a cada potencia faltante un cero como su coeficiente. La operación puede disponerse convenientemente en tres líneas.

En la primera línea escribir los coeficientes de $f(x)$ en orden, así: $a_0\ a_1\ a_2 \cdots a_n$. (El cero debe indicarse para cualquier potencia que falte.)

Escribir a_0 en el primer lugar de la tercera línea. Multiplicar a_0 por r, colocar el producto en la segunda línea bajo a_1 y sumar, colocando la suma en la tercera línea. Multiplicar por r, colocar el producto en la segunda línea debajo de a_2 y sumar. Continuar este proceso lo más lejos posible.

La última suma en la tercera línea será el remanente, y los números que preceden, leídos de izquierda a derecha, serán los coeficientes de las potencias de x en el cociente, ordenadas de acuerdo con las potencias descendentes de x.

Ejemplo.

Dividir $3x^4 - 5x^2 + x - 20$ por $x + 2$.

Solución.
$$\begin{array}{rrrrrl} 3 & +\ 0 & -\ 5 & +\ 1 & -\ 20 & \underline{(-2} \\ & -\ 6 & +\ 12 & -\ 14 & +\ 26 & \\ \hline 3 & -\ 6 & +\ 7 & -\ 13 & (+\ 6) & \end{array}$$

Cociente $= 3x^3 - 6x^2 + 7x - 13$, remanente $= 6$.

EJERCICIOS XIII. A

Emplear la división sintética en los ejercicios siguientes:

1. $(x^3 + 6x^2 - 7x - 8) \div (x - 2)$.
2. $(x^3 - 4x^2 - 5x - 6) \div (x + 3)$.
3. $(x^3 - 7x^2 + 2x + 4) \div (x - 1)$.
4. $(2x^3 + 10x^2 + 5x + 11) \div (x + 5)$.
5. $(x^3 - 3x^2 - 25x + 12) \div (x + 4)$.
6. $(6x^3 + 12x^2 + x - 20) \div (x + 5)$.
7. $(5x^3 - 6x^2 - 17x - 9) \div (x - 7)$.
8. $(7x^3 - x + 24) \div (x - 6)$.
9. $(x^4 + 4x^3 - 23x^2 + 10x - 12) \div (x - 3)$.
10. $(x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 30x - 63) \div (x - 3)$.
11. $(x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 15x - 4) \div (x + 4)$.
12. $(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$.
13. $(3x^4 + 4x^3 - 7x + 22) \div (x + 5)$.
14. $(4x^4 - 120x^2 + 18x - 720) \div (x - 6)$.
15. $(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x + 1)$.
16. $(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) \div (x - \frac{1}{2})$.
17. $(4x^3 - 4x^2 - 11x + 6) \div (x + \frac{3}{2})$.

18. $(3x^3 + 2x^2 - 15x - 10) \div (x - \sqrt{5})$.
19. $(x^3 - 15x^2 + 60x - 46) \div (x - 7 + \sqrt{3})$.

Emplear la división sintética y el teorema del remanente en los ejercicios siguientes:

20. Dado $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 2$; dar $f(3)$, $f(-3)$.
21. Dado $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 6x + 5$; dar $f(x)$, $f(-5)$.
22. Dado $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x - 8$; dar $f(4)$, $f(-4)$.
23. Demostrar que $x + 4$ es un factor de $2x^3 + 5x^2 - 32x - 80$.
24. Demostrar que $(x - 2)$ es un factor de $3x^4 - 10x^3 - x^2 + 28x - 20$.

13.6. Localización de los ceros reales de un polinomio.

La división sintética es útil para dibujar un polinomio y, consecuentemente, para localizar sus ceros reales. Por ejemplo, considerando el polinomio

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20.$$

El teorema del remanente nos indica que el remanente que se obtiene al dividir por $x - r$ es $f(r)$. Por medio de la división sintética podemos, entonces, establecer la tabla siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-67	-4	21	20	5	-12	-19	-4	45

Cuando los valores indicados en esta tabla se localizan tenemos una gráfica del polinomio (Gráf. 13.1). Notamos que cruza el eje x entre -2 y -1, entre 1 y 2 entre 4 y 5. Puesto que $f(x) = 0$ donde la gráfica cruza el eje x, hemos localizado tres raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

Hemos empleado aquí los principios generales siguientes, que se aplican a cualquier polinomio $f(x)$:

Principio. Cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces $f(x) = 0$ para cuando menos un valor de x entre a y b. Es decir que hay cuando menos una raíz real de $f(x) = 0$ entre a y b. Este principio depende del hecho que un polinomio es una función *continua* y que su gráfica es una curva continua, lo que quiere decir esencialmente que la gráfica no se compone de partes desconectadas. Cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, los puntos A y B en la gráfica, que corresponden

Regla. Para dividir $f(x)$ por $x - r$, arreglar $f(x)$ de acuerdo con las potencias descendentes de x, asegurándose de proporcionar a cada potencia faltante un cero como su coeficiente. La operación puede disponerse convenientemente en tres líneas.

En la primera línea escribir los coeficientes de $f(x)$ en orden, así: $a_0\ a_1\ a_2 \cdots a_n$. (El cero debe indicarse para cualquier potencia que falte.)

Escribir a_0 en el primer lugar de la tercera línea. Multiplicar a_0 por r, colocar el producto en la segunda línea bajo a_1 y sumar, colocando la suma en la tercera línea. Multiplicar por r, colocar el producto en la segunda línea debajo de a_2 y sumar. Continuar este proceso lo más lejos posible.

La última suma en la tercera línea será el remanente, y los números que preceden, leídos de izquierda a derecha, serán los coeficientes de las potencias de x en el cociente, ordenadas de acuerdo con las potencias descendentes de x.

Ejemplo.

Dividir $3x^4 - 5x^2 + x - 20$ por $x + 2$.

Solución.

$$\begin{array}{l} 3 + 0 - 5 + 1 - 20 \quad \underline{(-2} \\ \quad - 6 + 12 - 14 + 26 \\ \hline 3 - 6 + 7 - 13\ (+6) \end{array}$$

Cociente $= 3x^3 - 6x^2 + 7x - 13$, remanente $= 6$.

EJERCICIOS XIII. A

Emplear la división sintética en los ejercicios siguientes:

1. $(x^3 + 6x^2 - 7x - 8) \div (x - 2)$.
2. $(x^3 - 4x^2 - 5x - 6) \div (x + 3)$.
3. $(x^3 - 7x^2 + 2x + 4) \div (x - 1)$.
4. $(2x^3 + 10x^2 + 5x + 11) \div (x + 5)$.
5. $(x^3 - 3x^2 - 25x + 12) \div (x + 4)$.
6. $(6x^3 + 12x^2 + x - 20) \div (x + 5)$.
7. $(5x^3 - 6x^2 - 17x - 9) \div (x - 7)$.
8. $(7x^3 - x + 24) \div (x - 6)$.
9. $(x^4 + 4x^3 - 23x^2 + 10x - 12) \div (x - 3)$.
10. $(x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 30x - 63) \div (x - 3)$.
11. $(x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 15x - 4) \div (x + 4)$.
12. $(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$.
13. $(3x^4 + 4x^3 - 7x + 22) \div (x + 5)$.
14. $(4x^4 - 120x^2 + 18x - 720) \div (x - 6)$.
15. $(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x + 1)$.
16. $(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) \div (x - \frac{1}{2})$.
17. $(4x^3 - 4x^2 - 11x + 6) \div (x + \frac{3}{2})$.

18. $(3x^3 + 2x^2 - 15x - 10) \div (x - \sqrt{5})$.
19. $(x^3 - 15x^2 + 60x - 46) \div (x - 7 + \sqrt{3})$.

Emplear la división sintética y el teorema del remanente en los ejercicios siguientes:

20. Dado $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 2$; dar $f(3)$, $f(-3)$.
21. Dado $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 6x + 5$; dar $f(x)$, $f(-5)$.
22. Dado $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x - 8$; dar $f(4)$, $f(-4)$.
23. Demostrar que $x + 4$ es un factor de $2x^3 + 5x^2 - 32x - 80$.
24. Demostrar que $(x - 2)$ es un factor de $3x^4 - 10x^3 - x^2 + 28x - 20$.

13.6. Localización de los ceros reales de un polinomio.

La división sintética es útil para dibujar un polinomio y, consecuentemente, para localizar sus ceros reales. Por ejemplo, considerando el polinomio

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20.$$

El teorema del remanente nos indica que el remanente que se obtiene al dividir por $x - r$ es $f(r)$. Por medio de la división sintética podemos, entonces, establecer la tabla siguiente:

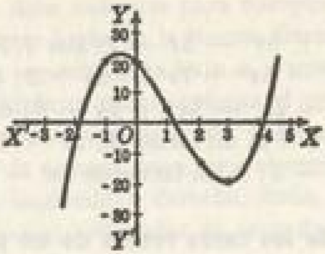
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-67	-4	21	20	5	-12	-19	-4	45

Cuando los valores indicados en esta tabla se localizan tenemos una gráfica del polinomio (Gráf. 13.1). Notamos que cruza el eje x entre -2 y -1, entre 1 y 2 entre 4 y 5. Puesto que $f(x) = 0$ donde la gráfica cruza el eje x, hemos localizado tres raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

Hemos empleado aquí los principios generales siguientes, que se aplican a cualquier polinomio $f(x)$:

Principio. Cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces $f(x) = 0$ para cuando menos un valor de x entre a y b. Es decir que hay cuando menos una raíz real de $f(x) = 0$ entre a y b. Este principio depende del hecho que un polinomio es una función *continua* y que su gráfica es una curva continua, lo que quiere decir esencialmente que la gráfica no se compone de partes desconectadas. Cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, los puntos A y B en la gráfica, que corresponden

a $x = a$ y $x = b$ respectivamente, se encontrarán e
del eje x. Consecuentemente, la curva debe cruzar el e
una vez y, en todo caso, un número non de veces, er
para cada cruce corresponde una raíz de $f(x) = 0$.



GRÁF. 13.1.
$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20$

Como consecuencia de este principio fundamenta
guientes proposiciones útiles:

Cuando una ecuación racional integral de grado no
reales tiene el coeficiente de su término de más alto gra
tiva, la ecuación tiene cuando menos una raíz real cuy
al del término constante.

Que la ecuación sea

$$f(x) = a_0x^n + \cdot \cdot \cdot + a_n = 0, \quad a_0$$

Puesto que n es non, $f(x)$ será positivo por los valores
de x y negativo por los valores negativos grandes.* T
por $x = 0$. Simbólicamente,

$$f(-\infty) = -\infty, \quad f(0) = a_n, \quad f(+\infty)$$

Cuando a_n es positivo habrá una raíz entre $-\infty$ y
raíz negativa. Similarmente, cuando a_n es negativo, h
sitiva.

Cuando una ecuación racional integral, del mismo
cientes reales tiene el coeficiente de su potencia más
sitiva y tiene un término constante negativo, la ecua
menos una raíz positiva y cuando menos una raíz

* Esto se debe a que el signo de $f(x)$ se determina, par
bastante grandes de x, por el signo del término del más alto
$x^3 - 80x^2 - 50x - 1000$ será, con toda seguridad, positivo cu

Si en (1), n es par y $a_n < 0$, entonces $f(x)$ será positivo para valores grandes positivos y negativos de x, pero será negativo cuando $x = 0$. Se deduce que habrá cuando menos una raíz positiva y una raíz negativa.

13.7. Limites superiores e inferiores para raíces.

Cuando r es positivo (o cero) y cuando se divide un polinomio $f(x)$ por $x - r$ (división sintética), encontramos que todos los números de la tercera línea son positivos o cero y que r es el límite máximo de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Es decir que no puede haber raíz más grande que r.

Se debe a que cualquier número que sea más grande que r hará que los números en la tercera línea sean aún más grandes, y en consecuencia el remanente no puede ser cero. Por lo tanto, ningún número más grande puede ser una raíz.

Ejemplo 1.

Dar el límite máximo de las raíces de

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20 = 0.$$

Solución. Ya sabemos, por la sección anterior, que existe una raíz entre 4 y 5. Dividimos el polinomio por $x - 5$:

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & -\ 7 & -\ 10 & +\ 20 & \ (\underline{5} \\ & +\ 10 & +\ 15 & +\ 25 & \\ \hline 2 & +\ 3 & +\ 5 & +\ 45 & \end{array}$$

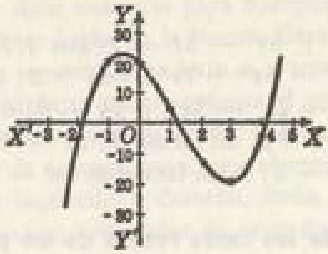
Todos los números de la tercera línea son positivos, por lo tanto 5 es el límite máximo de las raíces.

Para encontrar el límite inferior de las raíces, se debe emplear la ecuación $f(-x) = 0$, cuyas raíces serán las negativas de las de $f(x) = 0$. (Es decir, cuando $f(x) = 0$ tiene como raíz $x = -5$, entonces $f(-x) = 0$ tendrá como raíz $x = 5$.) Cuando r (un número positivo) es el límite máximo de las raíces de $f(-x) = 0$, entonces $-r$ es el límite inferior de las raíces de $f(x) = 0$.

La regla siguiente, que no es difícil de demostrar, puede emplearse también para determinar el límite inferior de las raíces de una ecuación racional integral $f(x) = 0$: cuando r es negativo y cuando se divide $f(x)$ por $x - r$ (división sintética), encontramos que los números de la tercera línea alternan de signo,* y que r es un límite inferior de las raíces de $f(x) = 0$.

* Un cero puede considerarse como + o —.

a $x = a$ y $x = b$ respectivamente, se encontrarán en lados opuestos del eje x. Consecuentemente, la curva debe cruzar el eje cuando menos una vez y, en todo caso, un número non de veces, entre A y B. Pero para cada cruce corresponde una raíz de $f(x) = 0$.



GRÁF. 13.1.
$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20$

Como consecuencia de este principio fundamental, tenemos las siguientes proposiciones útiles:

Cuando una ecuación racional integral de grado non con coeficientes reales tiene el coeficiente de su término de más alto grado en forma positiva, la ecuación tiene cuando menos una raíz real cuyo signo es opuesto al del término constante.

Que la ecuación sea

$$f(x) = a_0x^n + \cdot \cdot \cdot + a_n = 0, \qquad a_0 > 0. \tag{1}$$

Puesto que n es non, $f(x)$ será positivo por los valores grandes positivos de x y negativo por los valores negativos grandes.* Tendrá el valor a_n por $x = 0$. Simbólicamente,

$$f(-\infty) = -\infty, \qquad f(0) = a_n, \qquad f(+\infty) = +\infty.$$

Cuando a_n es positivo habrá una raíz entre $-\infty$ y 0, es decir, una raíz negativa. Similarmente, cuando a_n es negativo, habrá una raíz positiva.

Cuando una ecuación racional integral, del mismo grado, con coeficientes reales tiene el coeficiente de su potencia más alta en forma positiva y tiene un término constante negativo, la ecuación tiene cuando menos una raíz positiva y cuando menos una raíz negativa.

* Esto se debe a que el signo de $f(x)$ se determina, para valores numericales bastante grandes de x, por el signo del término del más alto grado. Por ejemplo, $x^3 - 80x^2 - 50x - 1000$ será, con toda seguridad, positivo cuando x es 100 o más.

Si en (1), n es par y $a_n < 0$, entonces $f(x)$ será positivo para valores grandes positivos y negativos de x, pero será negativo cuando $x = 0$. Se deduce que habrá cuando menos una raíz positiva y una raíz negativa.

13.7. Límites superiores e inferiores para raíces.

Cuando r es positivo (o cero) y cuando se divide un polinomio $f(x)$ por $x - r$ (división sintética), encontramos que todos los números de la tercera línea son positivos o cero y que r es el límite máximo de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Es decir que no puede haber raíz más grande que r.

Se debe a que cualquier número que sea más grande que r hará que los números en la tercera línea sean aún más grandes, y en consecuencia el remanente no puede ser cero. Por lo tanto, ningún número más grande puede ser una raíz.

Ejemplo 1.

Dar el límite máximo de las raíces de

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20 = 0.$$

Solución. Ya sabemos, por la sección anterior, que existe una raíz entre 4 y 5. Dividimos el polinomio por $x - 5$:

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & -\ 7 & -\ 10 & +\ 20 & \quad (\underline{5} \\ & +\ 10 & +\ 15 & +\ 25 & \\ \hline 2 & +\ 3 & +\ 5 & +\ 45 & \end{array}$$

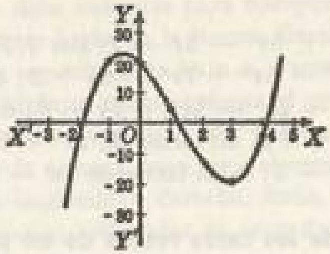
Todos los números de la tercera línea son positivos, por lo tanto 5 es el límite máximo de las raíces.

Para encontrar el límite inferior de las raíces, se debe emplear la ecuación $f(-x) = 0$, cuyas raíces serán las negativas de las de $f(x) = 0$. (Es decir, cuando $f(x) = 0$ tiene como raíz $x = -5$, entonces $f(-x) = 0$ tendrá como raíz $x = 5$.) Cuando r (un número positivo) es el límite máximo de las raíces de $f(-x) = 0$, entonces $-r$ es el límite inferior de las raíces de $f(x) = 0$.

La regla siguiente, que no es difícil de demostrar, puede emplearse también para determinar el límite inferior de las raíces de una ecuación racional integral $f(x) = 0$: cuando r es negativo y cuando se divide $f(x)$ por $x - r$ (división sintética), encontramos que los números de la tercera línea alternan de signo,* y que r es un límite inferior de las raíces de $f(x) = 0$.

* Un cero puede considerarse como + o —.

a $x = a$ y $x = b$ respectivamente, se encontrarán en lados opuestos del eje x. Consecuentemente, la curva debe cruzar el eje cuando menos una vez y, en todo caso, un número non de veces, entre A y B. Pero para cada cruce corresponde una raíz de $f(x) = 0$.



GRÁF. 13.1.
$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20$

Como consecuencia de este principio fundamental, tenemos las siguientes proposiciones útiles:

Cuando una ecuación racional integral de grado non con coeficientes reales tiene el coeficiente de su término de más alto grado en forma positiva, la ecuación tiene cuando menos una raíz real cuyo signo es opuesto al del término constante.

Que la ecuación sea

$$f(x) = a_0x^n + \cdot \cdot \cdot + a_n = 0, \qquad a_0 > 0. \tag{1}$$

Puesto que n es non, $f(x)$ será positivo por los valores grandes positivos de x y negativo por los valores negativos grandes.* Tendrá el valor a_n por $x = 0$. Simbólicamente,

$$f(-\infty) = -\infty, \qquad f(0) = a_n, \qquad f(+\infty) = +\infty.$$

Cuando a_n es positivo habrá una raíz entre $-\infty$ y 0, es decir, una raíz negativa. Similarmente, cuando a_n es negativo, habrá una raíz positiva.

Cuando una ecuación racional integral, del mismo grado, con coeficientes reales tiene el coeficiente de su potencia más alta en forma positiva y tiene un término constante negativo, la ecuación tiene cuando menos una raíz positiva y cuando menos una raíz negativa.

* Esto se debe a que el signo de $f(x)$ se determina, para valores numéricales bastante grandes de x, por el signo del término del más alto grado. Por ejemplo, $x^3 - 80x^2 - 50x - 1000$ será, con toda seguridad, positivo cuando x es 100 o más.

Si en (1), n es par y $a_n < 0$, entonces $f(x)$ será positivo para valores grandes positivos y negativos de x, pero será negativo cuando $x = 0$. Se deduce que habrá cuando menos una raíz positiva y una raíz negativa.

13.7. Limites superiores e inferiores para raíces.

Cuando r es positivo (o cero) y cuando se divide un polinomio $f(x)$ por $x - r$ (división sintética), encontramos que todos los números de la tercera línea son positivos o cero y que r es el límite máximo de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Es decir que no puede haber raíz más grande que r.

Se debe a que cualquier número que sea más grande que r hará que los números en la tercera línea sean aún más grandes, y en consecuencia el remanente no puede ser cero. Por lo tanto, ningún número más grande puede ser una raíz.

Ejemplo 1.

Dar el límite máximo de las raíces de

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20 = 0.$$

Solución. Ya sabemos, por la sección anterior, que existe una raíz entre 4 y 5. Dividimos el polinomio por $x - 5$:

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & -\ 7 & -\ 10 & +\ 20 & \quad (\underline{5} \\ & +\ 10 & +\ 15 & +\ 25 & \\ \hline 2 & +\ 3 & +\ 5 & +\ 45 & \end{array}$$

Todos los números de la tercera línea son positivos, por lo tanto 5 es el límite máximo de las raíces.

Para encontrar el límite inferior de las raíces, se debe emplear la ecuación $f(-x) = 0$, cuyas raíces serán las negativas de las de $f(x) = 0$. (Es decir, cuando $f(x) = 0$ tiene como raíz $x = -5$, entonces $f(-x) = 0$ tendrá como raíz $x = 5$.) Cuando r (un número positivo) es el límite máximo de las raíces de $f(-x) = 0$, entonces $-r$ es el límite inferior de las raíces de $f(x) = 0$.

La regla siguiente, que no es difícil de demostrar, puede emplearse también para determinar el límite inferior de las raíces de una ecuación racional integral $f(x) = 0$: cuando r es negativo y cuando se divide $f(x)$ por $x - r$ (división sintética), encontramos que los números de la tercera línea alternan de signo,* y que r es un límite inferior de las raíces de $f(x) = 0$.

* Un cero puede considerarse como + o —.

Ejemplo 2.

Dar el límite inferior de las raíces de

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20 = 0.$$

Solución.

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 7(-x)^2 - 10(-x) +$$
$$= -2x^3 - 7x^2 + 10x + 20.$$

Notar que al reemplazar x por $-x$ esto cambia los
términos de grado impar pero no afecta los términos de
Asentar que $f(-x)$ es igual a cero y cambiar los signo

$$2x^3 + 7x^2 - 10x - 20 = 0.$$

Hemos visto en el núm. 13.6 que $f(x)$ tiene un cero en
consecuentemente $f(-x)$ tendrá un cero entre 1 y 2. Demos
que 2 es un límite máximo para las raíces de $f(-x) =$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 + & 7 - & 10 - & 20 & (2 \\ & + 4 + & 22 + & 24 & \\ \hline 2 + & 11 + & 12 + & 4 & \end{array}$$

Todos los números de la tercera línea son positivos;
máximo de las raíces de $f(-x) = 0$, y -2 es un límite infer
de $f(x) = 0$.

EJERCICIOS XIII. B

Dibujar las gráficas de los polinomios siguientes. Dar los
de sus ceros integrales y localizar sus otros ceros reales entre
secutivas.

1. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$
2. $x^3 + 3x^2 - 13x$
3. $3x^3 + 13x^2 + 2x - 8.$
4. $2x^3 - x^2 - 16x$
5. $x^3 + 4x^2 - 7x - 28.$
6. $x^3 - 7x + 3.$
7. $x^3 - 7x^2 + 3.$
8. $2x^3 + x - 10.$
9. $6x^3 - x^2 - 32x + 20.$
10. $2x^3 - 11x^2 +$
11. $2x^3 - 7x^2 + 22x + 13.$
12. $5x^3 + 29x^2 + 2$
13. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x - 24.$
14. $x^4 - 2x^3 - 4x^2$
15. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 10.$
16. $16x^4 + 3x^3 - 37x^2 + 4x - 60.$

Dar, por medio del método del núm. 13.7, los límites
feriores (los integrantes más cercanos arriba y abajo, respec
las raíces de las ecuaciones siguientes:

17. $x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0.$
18. $x^3 - 4x^2 - 2x$
19. $x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0.$
20. $2x^3 - 7x^2 - 4x$

21. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 7x - 3 = 0.$
22. $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0.$
23. $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x + 8 = 0.$
24. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 150 = 0.$

13.8. Números de raíces.

Adoptamos el teorema siguiente que se llama el *teorema fundamental de álgebra*: Cada ecuación racional íntegra tiene cuando menos una raíz. (Para comprobación ver *A Survey of Modern Algebra* ("Un estudio de la álgebra moderna") por Garrett Birkhoff y Saunders MacLane, The Macmillan Company, editores, edición revisada, 1953, página 107.)

Podemos, entonces, comprobar:

TEOREMA. Cada ecuación racional integral de grado n,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

tiene exactamente n raíces.

Por medio del teorema fundamental, $f(x) = 0$ tiene cuando menos una raíz. Hacemos que esta raíz sea r_1. Después, por medio del teorema de factores, $x - r_1$ es un factor de $f(x)$ y podemos indicar

$$f(x) = (x - r_1)Q_1(x),$$

donde $Q_1(x)$ es un polinomio del grado $n - 1$, que tiene a_0x^{n-1} como su término de más alto grado.

Aplicando otra vez el teorema fundamental, encontramos que $Q_1(x)$ tiene cuando menos un cero, digamos r_2 y $x - r_2$ es un factor de $Q_1(x)$. Así,

$$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x),$$

y

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x),$$

donde $Q_2(x)$ es un polinomio del grado $n - 2$, cuyo término de más alto grado es a_0x^{n-2}.

Siguiendo este proceso n veces, obtenemos

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2 \cdots (x - r_n)Q_n(x),$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio del grado $n - n = 0$, cuyo más alto grado es $a_0x^0 = a_0$. Es decir, Q_n es la constante a_0. Así,

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \tag{2}$$

y $f(x) = 0$ tiene las n raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

Ejemplo 2.

Dar el límite inferior de las raíces de

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20 = 0.$$

SOLUCIÓN.

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 7(-x)^2 - 10(-x) + 20$$
$$= -2x^3 - 7x^2 + 10x + 20.$$

Notar que al reemplazar x por $-x$ esto cambia los signos de todos términos de grado impar pero no afecta los términos de grado par.

Asentar que $f(-x)$ es igual a cero y cambiar los signos:

$$2x^3 + 7x^2 - 10x - 20 = 0.$$

Hemos visto en el núm. 13.6 que $f(x)$ tiene un cero entre -1 y -2; consecuentemente $f(-x)$ tendrá un cero entre 1 y 2. Demostraremos ahora que 2 es un límite máximo para las raíces de $f(-x) = 0$.

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & +\ 7 & -\ 10 & -\ 20 & \underline{(2} \\ & +\ 4 & +\ 22 & +\ 24 & \\ \hline 2 & +\ 11 & +\ 12 & +\ 4 & \end{array}$$

Todos los números de la tercera línea son positivos; 2 es un límite máximo de las raíces de $f(-x) = 0$, y -2 es un límite inferior de las raíces de $f(x) = 0$.

EJERCICIOS XIII. B

Dibujar las gráficas de los polinomios siguientes. Dar los valores exactos de sus ceros integrales y localizar sus otros ceros reales entre integrantes consecutivas.

1. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.
2. $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$.
3. $3x^3 + 13x^2 + 2x - 8$.
4. $2x^3 - x^2 - 16x + 15$.
5. $x^3 + 4x^2 - 7x - 28$.
6. $x^3 - 7x + 3$.
7. $x^3 - 7x^2 + 3$.
8. $2x^3 + x - 10$.
9. $6x^3 - x^2 - 32x + 20$.
10. $2x^3 - 11x^2 + 18x - 14$.
11. $2x^3 - 7x^2 + 22x + 13$.
12. $5x^3 + 29x^2 + 29x - 7$.
13. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x - 24$.
14. $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 3$.
15. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 10$.
16. $16x^4 + 3x^3 - 37x^2 + 4x - 60$.

Dar, por medio del método del núm. 13.7, los límites superiores e inferiores (los integrantes más cercanos arriba y abajo, respectivamente) para las raíces de las ecuaciones siguientes:

17. $x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$.
18. $x^3 - 4x^2 - 2x - 7 = 0$.
19. $x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0$.
20. $2x^3 - 7x^2 - 4x + 3 = 0$.

21. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 7x - 3 = 0.$
22. $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0.$
23. $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x + 8 = 0.$
24. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 150 = 0.$

13.8. Números de raíces.

Adoptamos el teorema siguiente que se llama el *teorema fundamental de álgebra*: Cada ecuación racional integra tiene cuando menos una raíz. (Para comprobación ver *A Survey of Modern Algebra* ("Un estudio de la álgebra moderna") por Garrett Birkhoff y Saunders MacLane, The Macmillan Company, editores, edición revisada, 1953, página 107.)

Podemos, entonces, comprobar:

Teorema. Cada ecuación racional integral de grado n,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

tiene exactamente n raíces.

Por medio del teorema fundamental, $f(x) = 0$ tiene cuando menos una raíz. Hacemos que esta raíz sea r_1. Después, por medio del teorema de factores, $x - r_1$ es un factor de $f(x)$ y podemos indicar

$$f(x) = (x - r_1)Q_1(x),$$

donde $Q_1(x)$ es un polinomio del grado $n - 1$, que tiene a_0x^{n-1} como su término de más alto grado.

Aplicando otra vez el teorema fundamental, encontramos que $Q_1(x)$ tiene cuando menos un cero, digamos r_2 y $x - r_2$ es un factor de $Q_1(x)$. Así,

$$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x),$$

y

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x),$$

donde $Q_2(x)$ es un polinomio del grado $n - 2$, cuyo término de más alto grado es a_0x^{n-2}.

Siguiendo este proceso n veces, obtenemos

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2 \cdots (x - r_n)Q_n(x),$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio del grado $n - n = 0$, cuyo más alto grado es $a_0x^0 = a_0$. Es decir, Q_n es la constante a_0. Así,

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \tag{2}$$

y $f(x) = 0$ tiene las n raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

Ejemplo 2.

Dar el límite inferior de las raíces de

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 20 = 0.$$

SOLUCIÓN.

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 7(-x)^2 - 10(-x) + 20$$
$$= -2x^3 - 7x^2 + 10x + 20.$$

Notar que al reemplazar x por $-x$ esto cambia los signos de todos términos de grado impar pero no afecta los términos de grado par.

Asentar que $f(-x)$ es igual a cero y cambiar los signos:

$$2x^3 + 7x^2 - 10x - 20 = 0.$$

Hemos visto en el núm. 13.6 que $f(x)$ tiene un cero entre -1 y -2; consecuentemente $f(-x)$ tendrá un cero entre 1 y 2. Demostraremos ahora que 2 es un límite máximo para las raíces de $f(-x) = 0$.

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & +7 & -10 & -20 & \underline{(2} \\ & +4 & +22 & +24 & \\ \hline 2 & +11 & +12 & +4 & \end{array}$$

Todos los números de la tercera línea son positivos; 2 es un límite máximo de las raíces de $f(-x) = 0$, y -2 es un límite inferior de las raíces de $f(x) = 0$.

EJERCICIOS XIII. B

Dibujar las gráficas de los polinomios siguientes. Dar los valores exactos de sus ceros integrales y localizar sus otros ceros reales entre integrantes consecutivas.

1. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.
2. $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$.
3. $3x^3 + 13x^2 + 2x - 8$.
4. $2x^3 - x^2 - 16x + 15$.
5. $x^3 + 4x^2 - 7x - 28$.
6. $x^3 - 7x + 3$.
7. $x^3 - 7x^2 + 3$.
8. $2x^3 + x - 10$.
9. $6x^3 - x^2 - 32x + 20$.
10. $2x^3 - 11x^2 + 18x - 14$.
11. $2x^3 - 7x^2 + 22x + 13$.
12. $5x^3 + 29x^2 + 29x - 7$.
13. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x - 24$.
14. $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 3$.
15. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 10$.
16. $16x^4 + 3x^3 - 37x^2 + 4x - 60$.

Dar, por medio del método del núm. 13.7, los límites superiores e inferiores (los integrantes más cercanos arriba y abajo, respectivamente) para las raíces de las ecuaciones siguientes:

17. $x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$.
18. $x^3 - 4x^2 - 2x - 7 = 0$.
19. $x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0$.
20. $2x^3 - 7x^2 - 4x + 3 = 0$.

21. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 7x - 3 = 0$.
22. $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$.
23. $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x + 8 = 0$.
24. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 150 = 0$.

13.8. Números de raíces.

Adoptamos el teorema siguiente que se llama el *teorema fundamental de álgebra*: Cada ecuación racional integra tiene cuando menos una raíz. (Para comprobación ver *A Survey of Modern Algebra* ("Un estudio de la álgebra moderna") por Garrett Birkhoff y Saunders MacLane, The Macmillan Company, editores, edición revisada, 1953, página 107.)

Podemos, entonces, comprobar:

Teorema. Cada ecuación racional integral de grado n,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, \qquad (1)$$

tiene exactamente n raíces.

Por medio del teorema fundamental, $f(x) = 0$ tiene cuando menos una raíz. Hacemos que esta raíz sea r_1. Después, por medio del teorema de factores, $x - r_1$ es un factor de $f(x)$ y podemos indicar

$$f(x) = (x - r_1)Q_1(x),$$

donde $Q_1(x)$ es un polinomio del grado $n - 1$, que tiene a_0x^{n-1} como su término de más alto grado.

Aplicando otra vez el teorema fundamental, encontramos que $Q_1(x)$ tiene cuando menos un cero, digamos r_2 y $x - r_2$ es un factor de $Q_1(x)$. Así,

$$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x),$$

y

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x),$$

donde $Q_2(x)$ es un polinomio del grado $n - 2$, cuyo término de más alto grado es a_0x^{n-2}.

Siguiendo este proceso n veces, obtenemos

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2 \cdots (x - r_n)Q_n(x),$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio del grado $n - n = 0$, cuyo más alto grado es $a_0x^0 = a_0$. Es decir, Q_n es la constante a_0. Así,

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \qquad (2)$$

y $f(x) = 0$ tiene las n raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

La ecuación no puede tener otras raíces, porque ningún
cuando es sustituido por x hará que cualquier de los fac
derecho de (2) sea igual a cero.

Debe notarse que los números $r_1, r_2, \cdots, r_n$ no tienen
Además, no son necesariamente distintos unos de otros. Po
demos tener $x - r$ apareciendo m veces como un facto
cuyo caso r se llama una raíz múltiple de $f(x) = 0$ de
una raíz de multiplicidad m. Una raíz de multiplicidad 2
raíz doble; una raíz de multiplicidad 3 se llama una *raíz*
Una raíz que corresponde a un factor linear que ocurre
mente, se llama una *raíz sencilla.*

Como un corolario del teorema antes expuesto, tenemos

Cuando dos polinomios en la misma variante, cada
de un grado no mayor de n, son iguales en valor para má
distintas de la variante, entonces los polinomios son idént

Supongamos que los polinomios sean

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots$$

Cuando son iguales para más en n valores de x, su dife
para más de n valores de x. Esta diferencia puede escribirs

$$(a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n - b$$

Pero cuando uno o más de los coeficientes $(a_0 - b_0)$, $(a_1$
$(a_n - b_n)$ en (3) es diferente de cero, debemos tener un
grado n, o menor, con más de n raíces distintas. Esto es
ción de lo anterior y es, por lo tanto, imposible. Por lo ta
de los coeficientes en (3) debe ser cero y tenemos

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b$$

En otras palabras, los dos polinomios son idénticos; su
iguales para todos los valores de x.

13.9. Raíces imaginarias.

Cuando un número imaginario $a + bi$ es una raíz
ción integral y racional $f(x) = 0$ con coeficientes real
imaginario conjugado $a - bi$ es también una raíz.

Puesto que $a + bi$ es una raíz de $f(x) = 0$, enton
teorema de los factores, $x - (a + bi)$ es un factor de $f($
de comprobación demostrará que $x - (a - bi)$ es tam

de $f(x)$ demostrando que el producto de estos dos factores lineales es un factor de $f(x)$. Marcando este producto con $P(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} P(x) &= [x - (a + bi)][x - (a - bi)] \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Dividir $f(x)$ por $P(x)$ hasta que el remanente no sea de un grado mayor que el primero (es decir, hasta que sea lineal o constante). Marcando el cociente con $Q(x)$ y el remanente con $Rx + S$, tenemos la identidad

$$f(x) \equiv P(x) \cdot Q(x) + Rx + S, \tag{1}$$

en la cual R y S son reales porque $P(x)$ tiene coeficientes reales.

En la identidad arriba indicada poner $x = a + bi$. Por hipótesis, $f(a + bi) = 0$. Puesto que $x - (a + bi)$ es un factor de $P(x)$, se deduce por el contrario del teorema de los factores que $P(a + bi) = 0$. Por lo tanto, de (1) obtenemos la relación

$$0 = 0 \cdot Q(a + bi) + R \cdot (a + bi) + S, \tag{2}$$

$$Ra + S + Rbi = 0. \tag{3}$$

Puesto que un número imaginario no puede ser cero a menos que tanto su parte real como su parte imaginaria sean cero (ver núm. 12.1.), se deduce de (3) que

$$Ra + S = 0, \qquad Rb = 0. \tag{4}$$

Pero, puesto que $a + bi$ es imaginario, $b \neq 0$. A partir de la segunda ecuación de (4) se entiende que $R = 0$ y de la primera ecuación de (4) que $S = 0$. Es decir que el remanente $Rx + S$ en (1) es cero y que $f(x) = P(x) \cdot Q(x)$. En otras palabras, $P(x)$ es un factor de $f(x)$.

Pero $x - (a - bi)$ es un factor de $P(x)$ y, en consecuencia, de $f(x)$. Por lo tanto, $a - bi$ es una raíz de $f(x) = 0$.

13.10. Raíces cuadráticas.

Un radical como $\sqrt{3}$ o $\sqrt[3]{5}$, en el cual el número debajo del signo de radical es racional pero el radical mismo es irracional, se llama un .... Un .... puede llamarse cuadrático, cúbico, etc... cuando su índice es dos, tres, etc...

Un teorema para los .... cuadráticos, similar al teorema de la sección anterior, se expresa de la manera siguiente:

La ecuación no puede tener otras raíces, porque ningún otro número cuando es sustituido por x hará que cualquier de los factores del lado derecho de (2) sea igual a cero.

Debe notarse que los números $r_1, r_2, \cdots, r_n$ no tienen que ser reales. Además, no son necesariamente distintos unos de otros. Por ejemplo, podemos tener $x - r$ apareciendo m veces como un factor de $f(x)$, en cuyo caso r se llama una raíz múltiple de $f(x) = 0$ de la orden m, o una raíz de multiplicidad m. Una raíz de multiplicidad 2 se llama una *raíz doble;* una raíz de multiplicidad 3 se llama una *raíz triple*, etc... Una raíz que corresponde a un factor linear que ocurre una vez solamente, se llama una *raíz sencilla.*

Como un corolario del teorema antes expuesto, tenemos lo que sigue:

Cuando dos polinomios en la misma variante, cada uno de ellos de un grado no mayor de n, son iguales en valor para más de n valores distintas de la variante, entonces los polinomios son idénticos.

Supongamos que los polinomios sean

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n.$$

Cuando son iguales para más en n valores de x, su diferencia es cero para más de n valores de x. Esta diferencia puede escribirse en la forma:

$$(a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n - b_n) = 0. \quad (3)$$

Pero cuando uno o más de los coeficientes $(a_0 - b_0), (a_1 - b_1) \cdots, (a_n - b_n)$ en (3) es diferente de cero, debemos tener una ecuación del grado n, o menor, con más de n raíces distintas. Esto es una contradicción de lo anterior y es, por lo tanto, imposible. Por lo tanto, cada uno de los coeficientes en (3) debe ser cero y tenemos

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_1, \qquad \cdots, \qquad a_n = b_n.$$

En otras palabras, los dos polinomios son idénticos; sus valores son iguales para todos los valores de x.

13.9. Raíces imaginarias.

Cuando un número imaginario $a + bi$ es una raíz de una ecuación integral y racional $f(x) = 0$ con coeficientes reales, el número imaginario conjugado $a - bi$ es también una raíz.

Puesto que $a + bi$ es una raíz de $f(x) = 0$, entonces, gracias al teorema de los factores, $x - (a + bi)$ es un factor de $f(x)$. El método de comprobación demostrará que $x - (a - bi)$ es también un factor

de $f(x)$ demostrando que el producto de estos dos factores lineales es un factor de $f(x)$. Marcando este producto con $P(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} P(x) &= [x - (a + bi)][x - (a - bi)] \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Dividir $f(x)$ por $P(x)$ hasta que el remanente no sea de un grado mayor que el primero (es decir, hasta que sea lineal o constante). Marcando el cociente con $Q(x)$ y el remanente con $Rx + S$, tenemos la identidad

$$f(x) \equiv P(x) \cdot Q(x) + Rx + S, \qquad (1)$$

en la cual R y S son reales porque $P(x)$ tiene coeficientes reales.

En la identidad arriba indicada poner $x = a + bi$. Por hipótesis, $f(a + bi) = 0$. Puesto que $x - (a + bi)$ es un factor de $P(x)$, se deduce por el contrario del teorema de los factores que $P(a + bi) = 0$. Por lo tanto, de (1) obtenemos la relación

$$0 = 0 \cdot Q(a + bi) + R \cdot (a + bi) + S, \qquad (2)$$

$$Ra + S + Rbi = 0. \qquad (3)$$

Puesto que un número imaginario no puede ser cero a menos que tanto su parte real como su parte imaginaria sean cero (ver núm. 12.1.), se deduce de (3) que

$$Ra + S = 0, \qquad Rb = 0. \qquad (4)$$

Pero, puesto que $a + bi$ es imaginario, $b \neq 0$. A partir de la segunda ecuación de (4) se entiende que $R = 0$ y de la primera ecuación de (4) que $S = 0$. Es decir que el remanente $Rx + S$ en (1) es cero y que $f(x) = P(x) \cdot Q(x)$. En otras palabras, $P(x)$ es un factor de $f(x)$.

Pero $x - (a - bi)$ es un factor de $P(x)$ y, en consecuencia, de $f(x)$. Por lo tanto, $a - bi$ es una raíz de $f(x) = 0$.

13.10. Raíces cuadráticas.

Un radical como $\sqrt{3}$ o $\sqrt[3]{5}$, en el cual el número debajo del signo de radical es racional pero el radical mismo es irracional, se llama un .... Un .... puede llamarse cuadrático, cúbico, etc... cuando su índice es dos, tres, etc...

Un teorema para los .... cuadráticos, similar al teorema de la sección anterior, se expresa de la manera siguiente:

La ecuación no puede tener otras raíces, porque ningún otro número cuando es sustituido por x hará que cualquier de los factores del lado derecho de (2) sea igual a cero.

Debe notarse que los números $r_1, r_2, \cdots, r_n$ no tienen que ser reales. Además, no son necesariamente distintos unos de otros. Por ejemplo, podemos tener $x - r$ apareciendo m veces como un factor de $f(x)$, en cuyo caso r se llama una raíz múltiple de $f(x) = 0$ de la orden m, o una raíz de multiplicidad m. Una raíz de multiplicidad 2 se llama una *raíz doble;* una raíz de multiplicidad 3 se llama una *raíz triple*, etc... Una raíz que corresponde a un factor linear que ocurre una vez solamente, se llama una *raíz sencilla.*

Como un corolario del teorema antes expuesto, tenemos lo que sigue:

Cuando dos polinomios en la misma variante, cada uno de ellos de un grado no mayor de n, son iguales en valor para más de n valores distintas de la variante, entonces los polinomios son idénticos.

Supongamos que los polinomios sean

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n.$$

Cuando son iguales para más en n valores de x, su diferencia es cero para más de n valores de x. Esta diferencia puede escribirse en la forma:

$$(a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n - b_n) = 0. \quad (3)$$

Pero cuando uno o más de los coeficientes $(a_0 - b_0)$, $(a_1 - b_1)$ $\cdots$, $(a_n - b_n)$ en (3) es diferente de cero, debemos tener una ecuación del grado n, o menor, con más de n raíces distintas. Esto es una contradicción de lo anterior y es, por lo tanto, imposible. Por lo tanto, cada uno de los coeficientes en (3) debe ser cero y tenemos

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b_n.$$

En otras palabras, los dos polinomios son idénticos; sus valores son iguales para todos los valores de x.

13.9. Raíces imaginarias.

Cuando un número imaginario $a + bi$ es una raíz de una ecuación integral y racional $f(x) = 0$ con coeficientes reales, el número imaginario conjugado $a - bi$ es también una raíz.

Puesto que $a + bi$ es una raíz de $f(x) = 0$, entonces, gracias al teorema de los factores, $x - (a + bi)$ es un factor de $f(x)$. El método de comprobación demostrará que $x - (a - bi)$ es también un factor

de $f(x)$ demostrando que el producto de estos dos factores lineales es un factor de $f(x)$. Marcando este producto con $P(x)$, tenemos

$$P(x) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)]$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Dividir $f(x)$ por $P(x)$ hasta que el remanente no sea de un grado mayor que el primero (es decir, hasta que sea lineal o constante). Marcando el cociente con $Q(x)$ y el remanente con $Rx + S$, tenemos la identidad

$$f(x) \equiv P(x) \cdot Q(x) + Rx + S, \tag{1}$$

en la cual R y S son reales porque $P(x)$ tiene coeficientes reales.

En la identidad arriba indicada poner $x = a + bi$. Por hipótesis, $f(a + bi) = 0$. Puesto que $x - (a + bi)$ es un factor de $P(x)$, se deduce por el contrario del teorema de los factores que $P(a + bi) = 0$. Por lo tanto, de (1) obtenemos la relación

$$0 = 0 \cdot Q(a + bi) + R \cdot (a + bi) + S, \tag{2}$$

$$Ra + S + Rbi = 0. \tag{3}$$

Puesto que un número imaginario no puede ser cero a menos que tanto su parte real como su parte imaginaria sean cero (ver núm. 12.1.), se deduce de (3) que

$$Ra + S = 0, \qquad Rb = 0. \tag{4}$$

Pero, puesto que $a + bi$ es imaginario, $b \neq 0$. A partir de la segunda ecuación de (4) se entiende que $R = 0$ y de la primera ecuación de (4) que $S = 0$. Es decir que el remanente $Rx + S$ en (1) es cero y que $f(x) = P(x) \cdot Q(x)$. En otras palabras, $P(x)$ es un factor de $f(x)$.

Pero $x - (a - bi)$ es un factor de $P(x)$ y, en consecuencia, de $f(x)$. Por lo tanto, $a - bi$ es una raíz de $f(x) = 0$.

13.10. Raíces cuadráticas.

Un radical como $\sqrt{3}$ o $\sqrt[3]{5}$, en el cual el número debajo del signo de radical es racional pero el radical mismo es irracional, se llama un .... Un .... puede llamarse cuadrático, cúbico, etc... cuando su índice es dos, tres, etc...

Un teorema para los .... cuadráticos, similar al teorema de la sección anterior, se expresa de la manera siguiente:

Cuando un .... cuadrático $a + \sqrt{b}$ (racion
una ecuación racional integral con coeficientes racional
conjugado $a - \sqrt{b}$ es también una raíz.

La comprobación se efectúa de acuerdo con un r
milar al que se empleó para el teorema de las raíces i
jugadas, razonamiento que no expondremos aquí.

EJERCICIOS XIII. C

1. Resolver la ecuación $x^4 - x^3 - 16x^2 + 59x + 13$
que una de sus raíces es $3 + 2i$.

SOLUCIÓN. Puesto que $3 + 2i$ es una raíz, 3 -
una raíz. Por lo tanto la expresión

$$[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] = x^2 - 6x +$$

es un factor del lado izquierdo de la ecuación dada.
este factor obtenemos $x^2 + 5x + 1 = 0$, una ecu
cuyas raíces son $\frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21})$. La solución comp

$$x = 3 \pm 2i, \qquad \tfrac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21}).$$

2. Resolver la ecuación $x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x -$
derando que $2 + \sqrt{5}$ es una raíz.
3. Resolver la ecuación $6x^4 - 35x^3 + 58x^2 + 23x -$
siderando que $3 - i\sqrt{2}$ es una raíz.
4. Resolver la ecuación $x^6 + 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 -$
a sabiendas que i es una raíz doble.
5. Resolver la ecuación $2x^6 - x^5 - 29x^4 + 14x^3 +$
$49 = 0$. sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz doble.
6. Resolver la ecuación $x^6 + 16x^5 + 86x^4 + 144x^3 -$
$- 676 = 0$, sabiendo que $-4 + \sqrt{3}$ es una raíz do
7. Resolver la ecuación $x^6 - 13x^5 + 66x^4 - 152x^3 +$
$- 200 = 0$, dado que $3 + i$ es una raíz doble.

13.11. Gráfica de un polinomio.

Cuando un polinomio, o una función racional in
expresa en forma factorizada, su gráfica puede obtener
En cada raíz real de $f(x) = 0$, la línea encuentra el eje
simple, la curva cruza el eje en un ángulo, en cada
orden par es tangente al eje y no lo cruza, en cada
orden impar es tangente al eje y lo cruza. Una gráfic

$$y = a_0(x - r_1)(x - r_2)^2(x - r_3)^3 \quad (a$$

en la cual todas las erres reales, se vería como en la Gráfica 13.2. Cuando el polinomio contiene cualquier factor imaginario aparecen en pares conjugadas (núm. 13.9.). Estos factores imaginarios no afectan

GRÁF. 13.2.

$$y = a_0(x - r_1)(x - r_2)^3(x - r_3)^2$$

la manera con la cual la curva encuentra el eje x, pero afectan la forma de la curva.

Las comprobaciones de estas afirmaciones no son difíciles, pero las omitiremos aquí.

EJERCICIOS XIII. D

Hacer los esquemas de las gráficas de los polinomios siguientes:

1. $(x + 3)(x - 1)(x - 4)$.
2. $x(x - 3)(x + 5)$.
3. $(x + 2)(x - 2)^2(x - 6)$.
4. $-2(x + 4)(x - 4)(x - 7)$.
5. $(2x - 5)(x + 3)(x - 4)^2$.
6. $(x + 4)^2(x - 5)^2$.
7. $\frac{1}{2}(x + 2)(x - 1)^3(x - 3)^2$.
8. $(x + 2)^3(x - 5)^4$.
9. $-x^2(x + 5)^3(x - 2)$.
10. $(3x + 2)(2x - 3)^3$.
11. $x^3(3 - x)(5 - x)^2$.
12. $(x^2 - 9)(x - 9)^2$.
13. $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4$.
14. $(x + 5)(1 - x)(3 - x)^2(5 - x)^3$.

13.12. Regla de Signos de Descartes.

Dos términos consecutivos de un polinomio en x, con coeficientes reales y términos arreglados de acuerdo con las potencias descendientes de x, se dice que tienen una variación de signo cuando uno es más y el otro es menos. Así, el polinomio

$$2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 3x - 7$$

tiene tres variaciones de signos. (Notar que algunas potencias de x pueden faltar.) La *Regla de Signos de Descartes* dice:

Una ecuación racional integral $f(x) = 0$, con coeficientes reales, tiene tantas raíces positivas como tiene variaciones de signos, o menos por un número par. (Una raíz de multiplicidad m se cuenta como m raíces.)

Cuando un .... cuadrático $a + \sqrt{b}$ (racional) es una raíz una ecuación racional integral con coeficientes racionales, el .... conjugado $a - \sqrt{b}$ es también una raíz.

La comprobación se efectúa de acuerdo con un razonamiento similar al que se empleó para el teorema de las raíces imaginarias conjugadas, razonamiento que no expondremos aquí.

EJERCICIOS XIII. C

1. Resolver la ecuación $x^4 - x^3 - 16x^2 + 59x + 13 = 0$, suponiendo que una de sus raíces es $3 + 2i$.

   SOLUCIÓN. Puesto que $3 + 2i$ es una raíz, $3 - 2i$ es también una raíz. Por lo tanto la expresión

   $$[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] = x^2 - 6x + 13$$

   es un factor del lado izquierdo de la ecuación dada. Dividiendo por este factor obtenemos $x^2 + 5x + 1 = 0$, una ecuación cuadrática cuyas raíces son $\frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21})$. La solución completa es

   $$x = 3 \pm 2i, \qquad \tfrac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21}).$$

2. Resolver la ecuación $x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6 = 0$, considerando que $2 + \sqrt{5}$ es una raíz.
3. Resolver la ecuación $6x^4 - 35x^3 + 58x^2 + 23x - 22 = 0$, considerando que $3 - i\sqrt{2}$ es una raíz.
4. Resolver la ecuación $x^6 + 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$, a sabiendas que i es una raíz doble.
5. Resolver la ecuación $2x^6 - x^5 - 29x^4 + 14x^3 + 112x^2 - 49x - 49 = 0$. sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz doble.
6. Resolver la ecuación $x^6 + 16x^5 + 86x^4 + 144x^3 - 191x^2 - 832x - 676 = 0$, sabiendo que $-4 + \sqrt{3}$ es una raíz doble.
7. Resolver la ecuación $x^6 - 13x^5 + 66x^4 - 152x^3 + 108x^2 + 140x - 200 = 0$, dado que $3 + i$ es una raíz doble.

13.11. Gráfica de un polinomio.

Cuando un polinomio, o una función racional integral, $f(x)$, se expresa en forma factorizada, su gráfica puede obtenerse rápidamente. En cada raíz real de $f(x) = 0$, la línea encuentra el eje x. En cada raíz simple, la curva cruza el eje en un ángulo, en cada raíz múltiple de orden par es tangente al eje y no lo cruza, en cada raíz múltiple de orden impar es tangente al eje y lo cruza. Una gráfica del polinomio

$$y = a_0(x - r_1)(x - r_2)^3(x - r_3)^2 \qquad (a_1 > 0),$$

en la cual todas las erres reales, se vería como en la Gráfica 13.2. Cuando el polinomio contiene cualquier factor imaginario aparecen en pares conjugadas (núm. 13.9.). Estos factores imaginarios no afectan

GRÁF. 13.2.

$$y = a_0(x - r_1)(x - r_2)^2(x - r_3)^3$$

la manera con la cual la curva encuentra el eje x, pero afectan la forma de la curva.

Las comprobaciones de estas afirmaciones no son difíciles, pero las omitiremos aquí.

EJERCICIOS XIII. D

Hacer los esquemas de las gráficas de los polinomios siguientes:

1. $(x + 3)(x - 1)(x - 4)$.
2. $x(x - 3)(x + 5)$.
3. $(x + 2)(x - 2)^2(x - 6)$.
4. $-2(x + 4)(x - 4)(x - 7)$.
5. $(2x - 5)(x + 3)(x - 4)^2$.
6. $(x + 4)^2(x - 5)^2$.
7. $\frac{1}{2}(x + 2)(x - 1)^3(x - 3)^2$.
8. $(x + 2)^3(x - 5)^4$.
9. $-x^2(x + 5)^3(x - 2)$.
10. $(3x + 2)(2x - 3)^3$.
11. $x^3(3 - x)(5 - x)^2$.
12. $(x^2 - 9)(x - 9)^2$.
13. $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4$.
14. $(x + 5)(1 - x)(3 - x)^2(5 - x)^3$.

13.12. Regla de Signos de Descartes.

Dos términos consecutivos de un polinomio en x, con coeficientes reales y términos arreglados de acuerdo con las potencias descendientes de x, se dice que tienen una variación de signo cuando uno es más y el otro es menos. Así, el polinomio

$$2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 3x - 7$$

tiene tres variaciones de signos. (Notar que algunas potencias de x pueden faltar.) La *Regla de Signos de Descartes* dice:

Una ecuación racional integral $f(x) = 0$, con coeficientes reales, tiene tantas raíces positivas como tiene variaciones de signos, o menos por un número par. (Una raíz de multiplicidad m se cuenta como m raíces.)

Cuando un .... cuadrático $a + \sqrt{b}$ (racional) es una raíz una ecuación racional integral con coeficientes racionales, el .... conjugado $a - \sqrt{b}$ es también una raíz.

La comprobación se efectúa de acuerdo con un razonamiento similar al que se empleó para el teorema de las raíces imaginarias conjugadas, razonamiento que no expondremos aquí.

EJERCICIOS XIII. C

1. Resolver la ecuación $x^4 - x^3 - 16x^2 + 59x + 13 = 0$, suponiendo que una de sus raíces es $3 + 2i$.

   SOLUCIÓN. Puesto que $3 + 2i$ es una raíz, $3 - 2i$ es también una raíz. Por lo tanto la expresión

   $$[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] = x^2 - 6x + 13$$

   es un factor del lado izquierdo de la ecuación dada. Dividiendo por este factor obtenemos $x^2 + 5x + 1 = 0$, una ecuación cuadrática cuyas raíces son $\frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21})$. La solución completa es

   $$x = 3 \pm 2i, \qquad \tfrac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21}).$$

2. Resolver la ecuación $x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6 = 0$, considerando que $2 + \sqrt{5}$ es una raíz.
3. Resolver la ecuación $6x^4 - 35x^3 + 58x^2 + 23x - 22 = 0$, considerando que $3 - i\sqrt{2}$ es una raíz.
4. Resolver la ecuación $x^6 + 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$, a sabiendas que i es una raíz doble.
5. Resolver la ecuación $2x^6 - x^5 - 29x^4 + 14x^3 + 112x^2 - 49x - 49 = 0$. sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz doble.
6. Resolver la ecuación $x^6 + 16x^5 + 86x^4 + 144x^3 - 191x^2 - 832x - 676 = 0$, sabiendo que $-4 + \sqrt{3}$ es una raíz doble.
7. Resolver la ecuación $x^6 - 13x^5 + 66x^4 - 152x^3 + 108x^2 + 140x - 200 = 0$, dado que $3 + i$ es una raíz doble.

13.11. Gráfica de un polinomio.

Cuando un polinomio, o una función racional integral, $f(x)$, se expresa en forma factorizada, su gráfica puede obtenerse rápidamente. En cada raíz real de $f(x) = 0$, la línea encuentra el eje x. En cada raíz simple, la curva cruza el eje en un ángulo, en cada raíz múltiple de orden par es tangente al eje y no lo cruza, en cada raíz múltiple de orden impar es tangente al eje y lo cruza. Una gráfica del polinomio

$$y = a_0(x - r_1)(x - r_2)^3(x - r_3)^2 \qquad (a_0 > 0),$$

en la cual todas las erres reales, se vería como en la Gráfica 13.2. Cuando el polinomio contiene cualquier factor imaginario aparecen en pares conjugadas (núm. 13.9.). Estos factores imaginarios no afectan

GRÁF. 13.2.

$$y = a_0(x - r_1)(x - r_2)^2(x - r_3)^3$$

la manera con la cual la curva encuentra el eje x, pero afectan la forma de la curva.

Las comprobaciones de estas afirmaciones no son difíciles, pero las omitiremos aquí.

EJERCICIOS XIII. D

Hacer los esquemas de las gráficas de los polinomios siguientes:

1. $(x + 3)(x - 1)(x - 4)$.
2. $x(x - 3)(x + 5)$.
3. $(x + 2)(x - 2)^2(x - 6)$.
4. $-2(x + 4)(x - 4)(x - 7)$.
5. $(2x - 5)(x + 3)(x - 4)^2$.
6. $(x + 4)^2(x - 5)^3$.
7. $\frac{1}{2}(x + 2)(x - 1)^3(x - 3)^2$.
8. $(x + 2)^3(x - 5)^4$.
9. $-x^2(x + 5)^3(x - 2)$.
10. $(3x + 2)(2x - 3)^3$.
11. $x^3(3 - x)(5 - x)^2$.
12. $(x^2 - 9)(x - 9)^2$.
13. $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4$.
14. $(x + 5)(1 - x)(3 - x)^2(5 - x)^3$.

13.12. Regla de Signos de Descartes.

Dos términos consecutivos de un polinomio en x, con coeficientes reales y términos arreglados de acuerdo con las potencias descendientes de x, se dice que tienen una variación de signo cuando uno es más y el otro es menos. Así, el polinomio

$$2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 3x - 7$$

tiene tres variaciones de signos. (Notar que algunas potencias de x pueden faltar.) La *Regla de Signos de Descartes* dice:

Una ecuación racional integral $f(x) = 0$, con coeficientes reales, tiene tantas raíces positivas como tiene variaciones de signos, o menos por un número par. (Una raíz de multiplicidad m se cuenta como m raíces.)

Suponiendo que un polinomio $P(x)$ se representa
sistema siguiente, en el cual los puntos después de un sig
puede haber más signos de la misma clase, pero que n
cambio de signo antes del signo explícitamente escrito:

$$P(x) = + \cdots - \cdots + \cdots$$

Multiplicar $P(x)$ por $x - r (r > 0)$. Esquemáticamen
cación puede representarse por

$$\begin{aligned} xP(x) &= + \cdots\cdots - \cdots\cdots + \cdots \\ -rP(x) &= \quad - \cdots - + \cdots + - \\ (x - r)P(x) &= + \pm \cdots - + \cdots + \pm \end{aligned}$$

El signo ambiguo $\pm$ indica que el signo del término
es indeterminado —no sabemos si es más o menos. Per
qué signos puedan tener estos términos dudosos, hay
una variación más de signo en el producto $(x - r)(P($
hay una variación adicional al final.

El producto puede tener más de una variación ad
que términos sucesivos de signos iguales, por ejemplo
$- - -$, en el polinomio original, que están sustitu
güedades en el producto, pueden realmente reemplazars
o por $- + -$ respectivamente. Pero tales cambios au
el número de variaciones en un número par.

De allí que el número de variaciones en $(x - r)$
el de $P(x)$ por 1, o por 1 más un número par, es decir,
impar.

Ahora supondremos que el producto de todos estos f
rresponden a las raíces negativas y complejas de $f(x)$ s
en un polinomio $P(x)$. Puesto que $P(x) = 0$ no tiene
sus primeros y últimos términos deben tener signos ig
manera sería negativo por $x = 0$ y positivo para valore
o a la inversa, y tendría una raíz positiva.) Por lo ta
tener un número par de variaciones de signo, digamo

Cuando una raíz positiva se introduce al multipl
$x - r_1$ $(r_1 > 0)$, el número de variaciones aumenta
impar, digamos $2k_1 + 1$. Suponiendo que hemos introd
positivas, $r_1 \cdots, r_m$, hemos aumentado el número
hasta

$$2k + 2k_1 + 1 + \cdots + 2k_m + 1$$
$$= 2(k + k_1 + \cdots$$

Es decir que el número de raíces positivas, m, es el número de variaciones menos $2(k + k_1 + \cdots + k_m)$, que es un número par (cero cuando todos los *kas* son cero). Eso es la Regla de Descartes.

Al aplicar la regla de Descartes a $f(-x) = 0$, se puede obtener los datos concernientes al número de raíces negativas de una ecuación.

Ejemplo 1.

Investigar la naturaleza de las raíces de

$$f(x) = x^3 + 3x - 5 = 0.$$

Solución. 1 variación; por lo tanto, 1 raíz positiva.

$$f(-x) = -x^3 - 3x - 5 = 0.$$

No hay variación; por lo tanto no hay raíces negativas de la ecuación original.

La ecuación es del tercer grado y debe tener tres raíces. Por lo tanto, dos raíces deben ser imaginarias.

Ejemplo 2.

Investigar la naturaleza de las raíces de

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 3x - 7 = 0.$$

Solución. 3 variaciones; por lo tanto 3 o 1 raíces positivas.

$$f(-x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x - 7 = 0.$$

Dos variaciones; por lo tanto 2 o 0 raíces negativas.

Las diferentes posibilidades para las distintas raíces se indican a continuación.

Positivas	3	3	1	1
Negativas	2	0	2	0
Imaginarias	0	2	2	4
Total	5	5	5	5

EJERCICIOS XIII. E

Dar toda la información aprovechable con base en la Regla de Signos de Descartes respecto a las raíces de las ecuaciones siguientes:

1. $x^3 + 4x - 1 = 0.$
2. $x^3 - 8x^2 - 9 = 0.$
3. $x^4 + 2x^2 + 5 = 0.$
4. $x^3 - 5x^2 + 2x - 3 = 0.$
5. $2x^3 - 3x^2 - x + 9 = 0.$
6. $3x^4 - 2x^3 - 7x - 5 = 0.$
7. $x^4 + 3x^3 + 7x - 2 = 0.$
8. $2x^4 - 5x^2 + 2x + 6 = 0.$

Suponiendo que un polinomio $P(x)$ se representa por medio del sistema siguiente, en el cual los puntos después de un signo indican que puede haber más signos de la misma clase, pero que no puede haber cambio de signo antes del signo explícitamente escrito:

$$P(x) = + \cdots - \cdots + \cdots$$

Multiplicar $P(x)$ por $x - r (r > 0)$. Esquemáticamente, la multiplicación puede representarse por

$$\begin{aligned} xP(x) &= + \cdots\cdots - \cdots\cdots + \cdots\cdots \\ -rP(x) &= \quad - \cdots - + \cdots + - \cdots - \\ (x - r)\mathrm{P}(x) &= + \pm \cdots - + \cdots + \pm \cdots - \end{aligned}$$

El signo ambiguo $\pm$ indica que el signo del término correspondiente es indeterminado —no sabemos si es más o menos. Pero, sin importar qué signos puedan tener estos términos dudosos, hay cuando menos una variación más de signo en el producto $(x - r)(P(x)$ puesto que hay una variación adicional al final.

El producto puede tener más de una variación adicional; puesto que términos sucesivos de signos iguales, por ejemplo, $+ + +$ o $- - -$, en el polinomio original, que están sustituidos por ambigüedades en el producto, pueden realmente reemplazarse por $+ - +$ o por $- + -$ respectivamente. Pero tales cambios aumentan siempre el número de variaciones en un número par.

De allí que el número de variaciones en $(x - r)P(x)$ sobrepasa el de $P(x)$ por 1, o por 1 más un número par, es decir, por un número impar.

Ahora supondremos que el producto de todos estos factores que corresponden a las raíces negativas y complejas de $f(x)$ se han formado en un polinomio $P(x)$. Puesto que $P(x) = 0$ no tiene raíces positivas, sus primeros y últimos términos deben tener signos iguales. (De otra manera sería negativo por $x = 0$ y positivo para valores grandes de x, o a la inversa, y tendría una raíz positiva.) Por lo tanto, $P(x)$ debe tener un número par de variaciones de signo, digamos $2k$.

Cuando una raíz positiva se introduce al multiplicar $P(x)$ por $x - r_1$ $(r_1 > 0)$, el número de variaciones aumenta en un número impar, digamos $2k_1 + 1$. Suponiendo que hemos introducido m raíces positivas, $r_1 \cdots, r_m$, hemos aumentado el número de variaciones hasta

$$2k + 2k_1 + 1 + \cdots + 2k_m + 1 = 2(k + k_1 + \cdots + k_m) + m.$$

Es decir que el número de raíces positivas, m, es el número de variaciones menos $2(k + k_1 + \cdot \cdot \cdot + k_m)$, que es un número par (cero cuando todos los $k$as son cero). Eso es la Regla de Descartes.

Al aplicar la regla de Descartes a $f(-x) = 0$, se puede obtener los datos concernientes al número de raíces negativas de una ecuación.

Ejemplo 1.

Investigar la naturaleza de las raíces de

$$f(x) = x^3 + 3x - 5 = 0.$$

Solución. 1 variación; por lo tanto, 1 raíz positiva.

$$f(-x) = - x^3 - 3x - 5 = 0.$$

No hay variación; por lo tanto no hay raíces negativas de la ecuación original.

La ecuación es del tercer grado y debe tener tres raíces. Por lo tanto, dos raíces deben ser imaginarias.

Ejemplo 2.

Investigar la naturaleza de las raíces de

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 3x - 7 = 0.$$

Solución. 3 variaciones; por lo tanto 3 o 1 raíces positivas.

$$f(-x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x - 7 = 0.$$

Dos variaciones; por lo tanto 2 o 0 raíces negativas.

Las diferentes posibilidades para las distintas raíces se indican a continuación.

Positivas Negativas Imaginarias	3 2 0	3 0 2	1 2 2	1 0 4
Total	5	5	5	5

EJERCICIOS XIII. E

Dar toda la información aprovechable con base en la Regla de Signos de Descartes respecto a las raíces de las ecuaciones siguientes:

1. $x^3 + 4x - 1 = 0.$
2. $x^3 - 8x^2 - 9 = 0.$
3. $x^3 + 2x^2 + 5 = 0.$
4. $x^3 - 5x^2 + 2x - 3 = 0.$
5. $2x^3 - 3x^2 - x + 9 = 0.$
6. $3x^3 - 2x^2 - 7x - 5 = 0.$
7. $x^3 + 3x^2 + 7x - 2 = 0.$
8. $2x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 0.$

Suponiendo que un polinomio $P(x)$ se representa por medio del sistema siguiente, en el cual los puntos después de un signo indican que puede haber más signos de la misma clase, pero que no puede haber cambio de signo antes del signo explícitamente escrito:

$$P(x) = + \cdots - \cdots + \cdots$$

Multiplicar $P(x)$ por $x - r(r > 0)$. Esquemáticamente, la multiplicación puede representarse por

$$\begin{aligned} xP(x) &= + \cdots\cdots - \cdots\cdots + \cdots\cdots \\ -rP(x) &= \quad - \cdots - + \cdots + - \cdots - \\ (x - r)P(x) &= + \pm \cdots - + \cdots + \pm \cdots - \end{aligned}$$

El signo ambiguo $\pm$ indica que el signo del término correspondiente es indeterminado —no sabemos si es más o menos. Pero, sin importar qué signos puedan tener estos términos dudosos, hay cuando menos una variación más de signo en el producto $(x - r)(P(x)$ puesto que hay una variación adicional al final.

El producto puede tener más de una variación adicional; puesto que términos sucesivos de signos iguales, por ejemplo, $+ + +$ o $- - -$, en el polinomio original, que están sustituidos por ambigüedades en el producto, pueden realmente reemplazarse por $+ - +$ o por $- + -$ respectivamente. Pero tales cambios aumentan siempre el número de variaciones en un número par.

De allí que el número de variaciones en $(x - r)P(x)$ sobrepasa el de $P(x)$ por 1, o por 1 más un número par, es decir, por un número impar.

Ahora supondremos que el producto de todos estos factores que corresponden a las raíces negativas y complejas de $f(x)$ se han formado en un polinomio $P(x)$. Puesto que $P(x) = 0$ no tiene raíces positivas, sus primeros y últimos términos deben tener signos iguales. (De otra manera sería negativo por $x = 0$ y positivo para valores grandes de x, o a la inversa, y tendría una raíz positiva.) Por lo tanto, $P(x)$ debe tener un número par de variaciones de signo, digamos $2k$.

Cuando una raíz positiva se introduce al multiplicar $P(x)$ por $x - r_1$ $(r_1 > 0)$, el número de variaciones aumenta en un número impar, digamos $2k_1 + 1$. Suponiendo que hemos introducido m raíces positivas, $r_1 \cdots, r_m$, hemos aumentado el número de variaciones hasta

$$2k + 2k_1 + 1 + \cdots + 2k_m + 1$$
$$= 2(k + k_1 + \cdots + k_m) + m.$$

Es decir que el número de raíces positivas, m, es el número de variaciones menos $2(k + k_1 + \cdots + k_m)$, que es un número par (cero cuando todos los *kas* son cero). Eso es la Regla de Descartes.

Al aplicar la regla de Descartes a $f(-x) = 0$, se puede obtener los datos concernientes al número de raíces negativas de una ecuación.

Ejemplo 1.

Investigar la naturaleza de las raíces de

$$f(x) = x^3 + 3x - 5 = 0.$$

Solución. 1 variación; por lo tanto, 1 raíz positiva.

$$f(-x) = -x^3 - 3x - 5 = 0.$$

No hay variación; por lo tanto no hay raíces negativas de la ecuación original.

La ecuación es del tercer grado y debe tener tres raíces. Por lo tanto, dos raíces deben ser imaginarias.

Ejemplo 2.

Investigar la naturaleza de las raíces de

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 3x - 7 = 0.$$

Solución. 3 variaciones; por lo tanto 3 o 1 raíces positivas.

$$f(-x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x - 7 = 0.$$

Dos variaciones; por lo tanto 2 o 0 raíces negativas.

Las diferentes posibilidades para las distintas raíces se indican a continuación.

Positivas Negativas Imaginarias	3 2 0	3 0 2	1 2 2	1 0 4
Total	5	5	5	5

EJERCICIOS XIII. E

Dar toda la información aprovechable con base en la Regla de Signos de Descartes respecto a las raíces de las ecuaciones siguientes:

1. $x^3 + 4x - 1 = 0.$
2. $x^3 - 8x^2 - 9 = 0.$
3. $x^3 + 2x^2 + 5 = 0.$
4. $x^3 - 5x^2 + 2x - 3 = 0.$
5. $2x^3 - 3x^2 - x + 9 = 0.$
6. $3x^3 - 2x^2 - 7x - 5 = 0.$
7. $x^3 + 3x^2 + 7x - 2 = 0.$
8. $2x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 0.$

9. $5x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$ 10. $4x^3 - 7x^2 - x$
11. $x^3 + 2x^2 - 5x - 8 = 0.$ 12. $2x^3 + 3x^2 + 4x$
13. $8x^3 - 10x^2 + 4x - 9 = 0.$ 14. $x^3 - 17x^2 - 11x$
15. $22x^3 - 19x^2 - 15x - 12 = 0.$
16. $x^4 - 10x^3 + x^2 + 6x + 11 = 0.$
17. $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 22 = 0.$
18. $5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 10 = 0.$
19. $x^4 - 17x^3 - 14x^2 + x - 5 = 0.$
20. $3x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 18x - 22 = 0.$
21. $2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 3x + 1 = 0.$
22. $x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 3x + 24 = 0.$
23. $5x^4 + 4x^3 - 7x + 11 = 0.$ 24. $3x^4 - 5x^2 + 19$
25. $x^5 + x^4 - x + 12 = 0.$ 26. $6x^4 + 3x^3 - 7x^2$
27. $x^6 + 4x^3 - 30 = 0.$ 28. $4x^4 + 2x^2 + 1$
29. $x^3 - 2 = 0.$ 30. $x^6 - 12 = 0.$

13.13. Raíces racionales.

Un *número racional* es un número que puede exactar
como una proporción de dos números enteros (ver núm.

Teorema. Cuando un número racional b/c, una f
términos más bajos o una integrante * es una raíz de la ec
integral

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

con coeficientes integrales, entonces b es un factor ** d
factor de a_0.

Para comprobar lo anterior, sustituir b/c en (1):

$$a_0\left(\frac{b}{c}\right)^n + a_1\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\frac{b}{c} + a_n$$

Multiplicar ambos lados de la ecuación por c^n:

$$a_0b^n + a_1b^{n-1}c + \cdots + a_{n-1}bc^{n-1} + a_nc^n =$$

Transponer el último término al lado derecho y factorizar
sión que queda a la izquierda:

$$b(a_0b^{n-1} + a_1b^{n-2}c + \cdots + a_{n-1}c^{n-1}) = -$$

Puesto que b es un factor del lado izquierdo es un factor

* Cuando b/c es una integrante, entonces c debe tomarse
** Cuando decimos que b es un factor de a_n queremos d
que la integrante b se encuentra en la integrante a un número ent

cho. No puede ser un factor de c, puesto que b/c se encuentra en sus términos más bajos. Debe, por lo tanto, ser un factor de a_n.

Similarmente, al transponer el primer término en (3), obtenemos

$$c(a_1b^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}bc^{n-2} + a_nc^{n-1}) = -a_0b^n. \qquad (5)$$

Discutiendo esto como antes, vemos que c debe ser un factor del lado derecho, y, puesto que no es un factor de b, debe ser un factor de a_0.

Corolario. Cualquier raíz racional de la ecuación

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (6)$$

en la cual las as son integrantes, es una integrante y un factor de a_n.

Las raíces racionales pueden encontrarse por división sintética.

Ejemplo.

Dar las raíces racionales de

$$f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 13x + 6 = 0.$$

Solución.

Numeradores posibles (factores de 6): 1, 2, 3, 6.
Denominadores posibles (factores de 2): 1, 2.
Raíces racionales posibles: $\pm$ (1, 2, 3, 6, ½, 3/2).

Siguiendo la Regla de Descartes no hay raíces positivas de ninguna clase, en consecuencia, necesitamos investigar solamente los valores negativos. Encontramos

$$f(-x) = 2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 6:$$

4 variaciones; por lo tanto, 4, 2 o 0 raíces negativas.

Probamos las raíces probables en orden, empezando por la más pequeña.*

$$\begin{array}{l} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{1/2} \\ \quad\; 1 - 4 \\ \hline 2 - 8 + 11 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{1} \\ 2 - 7 + 8 - 5 \quad\; \\ \hline 2 - 7 + 8 - 5\ (+1) \end{array}$$

Notar que no es necesario completar la división sintética para ½. Porque ½ × 11 es una fracción y sería imposible quedarse con un remanente cero.

$$\begin{array}{r} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{3/2} \\ 3 - 9 + 9 - 6 \quad\; \\ \hline 2 - 6 + 6 - 4\ (+0) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3/2 \text{ es una raíz de } f(-x) = 0, \\ -3/2 \text{ es una raíz de } f(x) = 0. \end{array}$$

* Empezando por los números que son numéricamente más bajos, podemos, a veces, encontrar límites para las raíces, eliminando la necesidad de probar cualquier valor más alto.

9. $5x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$
10. $4x^3 - 7x^2 - x - 15 = 0.$
11. $x^3 + 2x^2 - 5x - 8 = 0.$
12. $2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0.$
13. $8x^3 - 10x^2 + 4x - 9 = 0.$
14. $x^3 - 17x^2 - 11x + 14 = 0.$
15. $22x^3 - 19x^2 - 15x - 12 = 0.$
16. $x^4 - 10x^3 + x^2 + 6x + 11 = 0.$
17. $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 22 = 0.$
18. $5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 10 = 0.$
19. $x^4 - 17x^3 - 14x^2 + x - 5 = 0.$
20. $3x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 18x - 22 = 0.$
21. $2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 3x + 1 = 0.$
22. $x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 3x + 24 = 0.$
23. $5x^4 + 4x^3 - 7x + 11 = 0.$
24. $3x^4 - 5x^3 + 19x - 15 = 0.$
25. $x^5 + x^4 - x + 12 = 0.$
26. $6x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 20 = 0.$
27. $x^6 + 4x^3 - 30 = 0.$
28. $4x^4 + 2x^2 + 1 = 0.$
29. $x^5 - 2 = 0.$
30. $x^6 - 12 = 0.$

13.13. Raices racionales.

Un *número racional* es un número que puede exactamente definirse como una proporción de dos números enteros (ver núm. 12.2.).

TEOREMA. Cuando un número racional b/c, una fracción en sus términos más bajos o una integrante * es una raíz de la ecuación racional integral

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

con coeficientes integrales, entonces b es un factor ** de a_n y c es un factor de a_0.

Para comprobar lo anterior, sustituir b/c en (1):

$$a_0\left(\frac{b}{c}\right)^n + a_1\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}\frac{b}{c} + a_n = 0. \qquad (2)$$

Multiplicar ambos lados de la ecuación por c^n:

$$a_0b^n + a_1b^{n-1}c + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}bc^{n-1} + a_nc^n = 0. \qquad (3)$$

Transponer el último término al lado derecho y factorizar b en la expresión que queda a la izquierda:

$$b(a_0b^{n-1} + a_1b^{n-2}c + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}c^{n-1}) = -a_nc^n. \qquad (4)$$

Puesto que b es un factor del lado izquierdo es un factor del lado dere-

* Cuando b/c es una integrante, entonces c debe tomarse como 1.

** Cuando decimos que b es un factor de a_n queremos decir en este caso que la integrante b se encuentra en la integrante a un número entero de veces.

cho. No puede ser un factor de c, puesto que b/c se encuentra en sus términos más bajos. Debe, por lo tanto, ser un factor de a_n.

Similarmente, al transponer el primer término en (3), obtenemos

$$c(a_1b^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}bc^{n-2} + a_nc^{n-1}) = -a_0b^n. \qquad (5)$$

Discutiendo esto como antes, vemos que c debe ser un factor del lado derecho, y, puesto que no es un factor de b, debe ser un factor de a_0.

Corolario. Cualquier raíz racional de la ecuación

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (6)$$

en la cual las as son integrantes, es una integrante y un factor de a_n.

Las raíces racionales pueden encontrarse por división sintética.

Ejemplo.

Dar las raíces racionales de

$$f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 13x + 6 = 0.$$

Solución.

Numeradores posibles (factores de 6): 1, 2, 3, 6.
Denominadores posibles (factores de 2): 1, 2.
Raíces racionales posibles: ± (1, 2, 3, 6, ½, 3/2).

Siguiendo la Regla de Descartes no hay raíces positivas de ninguna clase, en consecuencia, necesitamos investigar solamente los valores negativos.

Encontramos

$$f(-x) = 2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 6:$$

4 variaciones; por lo tanto, 4, 2 o 0 raíces negativas.

Probamos las raíces probables en orden, empezando por la más pequeña.*

$$\begin{array}{l} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{½} \\ \quad\ \ 1 - 4 \\ \hline 2 - 8 + 11 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{1} \\ \quad\ \ 2 - \ 7 + \ 8 - 5 \\ \hline 2 - 7 + \ 8 - \ 5\ (+1) \end{array}$$

Notar que no es necesario completar la división sintética para ½. Porque ½ × 11 es una fracción y sería imposible quedarse con un remanente cero.

$$\begin{array}{l} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{3/2} \\ \quad\ \ 3 - \ 9 + \ 9 - 6 \\ \hline 2 - 6 + \ 6 - \ 4\ (+0) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3/2 \text{ es una raíz de } f(-x) = 0, \\ -3/2 \text{ es una raíz de } f(x) = 0. \end{array}$$

* Empezando por los números que son numéricamente más bajos, podemos, a veces, encontrar límites para las raíces, eliminando la necesidad de probar cualquier valor más alto.

9. $5x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$
10. $4x^3 - 7x^2 - x - 15 = 0.$
11. $x^3 + 2x^2 - 5x - 8 = 0.$
12. $2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0.$
13. $8x^3 - 10x^2 + 4x - 9 = 0.$
14. $x^3 - 17x^2 - 11x + 14 = 0.$
15. $22x^3 - 19x^2 - 15x - 12 = 0.$
16. $x^4 - 10x^3 + x^2 + 6x + 11 = 0.$
17. $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 22 = 0.$
18. $5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 10 = 0.$
19. $x^4 - 17x^3 - 14x^2 + x - 5 = 0.$
20. $3x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 18x - 22 = 0.$
21. $2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 3x + 1 = 0.$
22. $x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 3x + 24 = 0.$
23. $5x^4 + 4x^3 - 7x + 11 = 0.$
24. $3x^4 - 5x^2 + 19x - 15 = 0.$
25. $x^5 + x^4 - x + 12 = 0.$
26. $6x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 20 = 0.$
27. $x^6 + 4x^3 - 30 = 0.$
28. $4x^4 + 2x^2 + 1 = 0.$
29. $x^5 - 2 = 0.$
30. $x^6 - 12 = 0.$

13.13. Raices racionales.

Un *número racional* es un número que puede exactamente definirse como una proporción de dos números enteros (ver núm. 12.2.).

Teorema. Cuando un número racional b/c, una fracción en sus términos más bajos o una integrante * es una raíz de la ecuación racional integral

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

con coeficientes integrales, entonces b es un factor ** de a_n y c es un factor de a_0.

Para comprobar lo anterior, sustituir b/c en (1):

$$a_0\left(\frac{b}{c}\right)^n + a_1\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}\frac{b}{c} + a_n = 0. \qquad (2)$$

Multiplicar ambos lados de la ecuación por c^n:

$$a_0b^n + a_1b^{n-1}c + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}bc^{n-1} + a_nc^n = 0. \qquad (3)$$

Transponer el último término al lado derecho y factorizar b en la expresión que queda a la izquierda:

$$b(a_0b^{n-1} + a_1b^{n-2}c + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}c^{n-1}) = -a_nc^n. \qquad (4)$$

Puesto que b es un factor del lado izquierdo es un factor del lado dere-

* Cuando b/c es una integrante, entonces c debe tomarse como 1.

** Cuando decimos que b es un factor de a_n queremos decir en este caso que la integrante b se encuentra en la integrante a un número entero de veces.

cho. No puede ser un factor de c, puesto que b/c se encuentra en sus términos más bajos. Debe, por lo tanto, ser un factor de a_n.

Similarmente, al transponer el primer término en (3), obtenemos

$$c(a_1b^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}bc^{n-2} + a_nc^{n-1}) = -a_0b^n. \qquad (5)$$

Discutiendo esto como antes, vemos que c debe ser un factor del lado derecho, y, puesto que no es un factor de b, debe ser un factor de a_0.

Corolario. Cualquier raíz racional de la ecuación

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (6)$$

en la cual las *as* son integrantes, es una integrante y un factor de a_n.

Las raíces racionales pueden encontrarse por división sintética.

Ejemplo.

Dar las raíces racionales de

$$f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 13x + 6 = 0.$$

Solución.

Numeradores posibles (factores de 6): 1, 2, 3, 6.
Denominadores posibles (factores de 2): 1, 2.
Raíces racionales posibles: ± (1, 2, 3, 6, ½, 3/2).

Siguiendo la Regla de Descartes no hay raíces positivas de ninguna clase, en consecuencia, necesitamos investigar solamente los valores negativos.

Encontramos

$$f(-x) = 2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 6:$$

4 variaciones; por lo tanto, 4, 2 o 0 raíces negativas.

Probamos las raíces probables en orden, empezando por la más pequeña.*

$$\begin{array}{l} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{1/2} \\ \quad\;\; 1 - 4 \\ \hline 2 - 8 + 11 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{1} \\ \quad\;\; 2 - \;7 + \;8 - 5 \\ \hline 2 - 7 + \;8 - \;5\;(+1) \end{array}$$

Notar que no es necesario completar la división sintética para ½. Porque ½ × 11 es una fracción y sería imposible quedarse con un remanente cero.

$$\begin{array}{l} 2 - 9 + 15 - 13 + 6 \quad (\underline{3/2} \\ \quad\;\; 3 - \;9 + \;9 - 6 \\ \hline 2 - 6 + \;6 - \;4\;(+0) \end{array}$$

3/2 es una raíz de $f(-x) = 0$,
− 3/2 es una raíz de $f(x) = 0$.

* Empezando por los números que son numéricamente más bajos, podemos, a veces, encontrar límites para las raíces, eliminando la necesidad de probar cualquier valor más alto.

Empleamos ahora la *ecuación rebajada,* $2x^3 - 6x^2 +$
representada por los números $2 - 6 + 6 - 4$, que es el co
al dividir $f(-x) = 0$ por $x - \frac{3}{2}$. Esto puede simplificars
por 2, hasta $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$. Tiene las mism
$f(-x) = 0$, con la excepción de $\frac{3}{2}$, que ha sido dividido

Para la ecuación rebajada tenemos

Numeradores posibles: 1, 2.
Denominador posible: 1.
Raíces racionales posibles: 1, 2.

Ya hemos probado 1 en $f(-x)$. Probaremos 2:

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -3 & +3 & -2 & (\underline{2} \\ & 2 & -2 & +2 & \\ \hline 1 & -1 & +1 & (+0) & \end{array}$$

2 es una raíz de la ecuación
-2 es una raíz de $f(x) =$

La nueva ecuación rebajada es $x^2 - x + 1 = 0$. R
medio de la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Las raíces de $f(x) = 0$ son las negativas de estas. La ec
era del grado 4 y hemos encontrado las 4 raíces; son

$$-\frac{3}{2}, \quad -2, \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Notar que, aunque cierto número ha sido determinado
puede ser también una raíz de la ecuación rebajada. Eso o
es una raíz múltiple de la ecuación original.

EJERCICIOS XIII. F

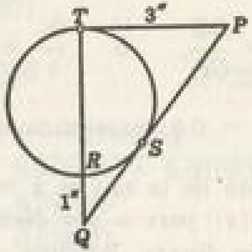
Dar las raíces racionales de las ecuaciones siguientes:

1. $x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$.
2. $x^3 - 3x^2 - 8x$
3. $x^3 + x + 10 = 0$.
4. $2x^3 - 3x^2 - 7x$
5. $2x^3 + 7x^2 - 19x + 6 = 0$.
6. $2x^3 + x^2 + x -$
7. $5x^3 + 3x^2 + 13x - 6 = 0$.
8. $3x^3 + 4x^2 - 16x$
9. $6x^3 - 19x^2 + x + 6 = 0$.
10. $6x^3 - 29x^2 + 39x - 10 = 0$.
11. $2x^3 - 3x^2 + x - 6 = 0$.
12. $2x^3 + 13x^2 + 12x + 3 = 0$.
13. $12x^3 - 32x^2 - 33x - 7 = 0$.

14. $24x^3 + 50x^2 - 31x - 15 = 0.$
15. $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0.$
16. $x^4 - 3x^3 - 21x^2 - 43x + 60 = 0.$
17. $12x^4 - 20x^3 - 57x^2 + 50x + 75 = 0.$
18. $28x^4 - 3x^3 - 154x^2 - 54x + 36 = 0.$
19. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x + 6 = 0.$
20. $8x^4 - 24x^3 + 5x^2 + 52x - 15 = 0.$
21. $6x^4 - 31x^3 - 44x^2 + 371x - 392 = 0.$
22. $x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 20x - 44 = 0.$
23. En la Gráfica 13.3. la tangente TP tiene 3 pulgadas de largo. El diámetro TR se extiende 1 pulgada hasta el punto Q. La tangente QS, extendida, pasa a través de P. Dar el radio del círculo.

13.14. Raíces irracionales.

Las raíces irracionales de cualquier clase de una ecuación $f(x) = 0$ pueden determinarse por un proceso de aproximaciones sucesivas, empleando el principio general indicado en el núm. 13.6, que, cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos encontrados hay una raíz de $f(x) = 0$ entre a y b. Cuando la ecuación es una ecuación racional integral po-



GRÁF. 13.3.

demos emplear la división sintética para obtener los valores de $f(x)$ o podemos conseguirlas por sustitución efectiva. En cuanto a otros tipos de ecuaciones, como *

$$\log x - x + 2 = 0,$$

debemos emplear, de hecho, la sustitución.

Ejemplo.

Dar una raíz irracional de $f(x) = x^3 + x - 5 = 0.$

SOLUCIÓN. De acuerdo con la Regla de Descartes, la ecuación tiene

* El símbolo log x quiere decir el logaritmo de x (ver Capítulo XIV).

Empleamos ahora la *ecuación rebajada*, $2x^3 - 6x^2 + 6x - 4 = 0$, representada por los números $2 - 6 + 6 - 4$, que es el cociente obtenido al dividir $f(-x) = 0$ por $x - \frac{3}{2}$. Esto puede simplificarse, dividiéndolo por 2, hasta $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$. Tiene las mismas raíces que $f(-x) = 0$, con la excepción de $\frac{3}{2}$, que ha sido dividido.

Para la ecuación rebajada tenemos

Numeradores posibles: 1, 2.
Denominador posible: 1.
Raíces racionales posibles: 1, 2.

Ya hemos probado 1 en $f(-x)$. Probaremos 2:

$$\begin{array}{l} 1 - 3 + 3 - 2 \quad (\underline{2} \\ \quad\;\; 2 - 2 + 2 \\ \hline 1 - 1 + 1 \; (+0) \end{array}$$

$\therefore$ 2 es una raíz de la ecuación rebajada
-2 es una raíz de $f(x) = 0$.

La nueva ecuación rebajada es $x^2 - x + 1 = 0$. Resolviendo por medio de la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Las raíces de $f(x) = 0$ son las negativas de estas. La ecuación original era del grado 4 y hemos encontrado las 4 raíces; son

$$-\frac{3}{2}, \quad -2, \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Notar que, aunque cierto número ha sido determinado ya como raíz, puede ser también una raíz de la ecuación rebajada. Eso ocurrirá cuando es una raíz múltiple de la ecuación original.

EJERCICIOS XIII. F

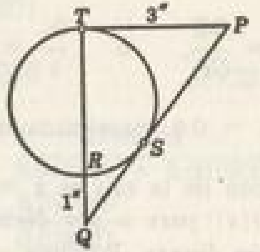
Dar las raíces racionales de las ecuaciones siguientes:

1. $x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$.
2. $x^3 - 3x^2 - 8x - 10 = 0$.
3. $x^3 + x + 10 = 0$.
4. $2x^3 - 3x^2 - 7x - 6 = 0$.
5. $2x^3 + 7x^2 - 19x + 6 = 0$.
6. $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.
7. $5x^3 + 3x^2 + 13x - 6 = 0$.
8. $3x^3 + 4x^2 - 16x + 8 = 0$.
9. $6x^3 - 19x^2 + x + 6 = 0$.
10. $6x^3 - 29x^2 + 39x - 10 = 0$.
11. $2x^3 - 3x^2 + x - 6 = 0$.
12. $2x^3 + 13x^2 + 12x + 3 = 0$.
13. $12x^3 - 32x^2 - 33x - 7 = 0$.

14. $24x^3 + 50x^2 - 31x - 15 = 0.$
15. $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0.$
16. $x^4 - 3x^3 - 21x^2 - 43x + 60 = 0.$
17. $12x^4 - 20x^3 - 57x^2 + 50x + 75 = 0.$
18. $28x^4 - 3x^3 - 154x^2 - 54x + 36 = 0.$
19. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x + 6 = 0.$
20. $8x^4 - 24x^3 + 5x^2 + 52x - 15 = 0.$
21. $6x^4 - 31x^3 - 44x^2 + 371x - 392 = 0.$
22. $x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 20x - 44 = 0.$
23. En la Gráfica 13.3. la tangente TP tiene 3 pulgadas de largo. El diámetro TR se extiende 1 pulgada hasta el punto Q. La tangente QS, extendida, pasa a través de P. Dar el radio del círculo.

13.14. Raíces irracionales.

Las raíces irracionales de cualquier clase de una ecuación $f(x) = 0$ pueden determinarse por un proceso de aproximaciones sucesivas, empleando el principio general indicado en el núm. 13.6, que, cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos encontrados hay una raíz de $f(x) = 0$ entre a y b. Cuando la ecuación es una ecuación racional integral po-



GRÁF. 13.3.

demos emplear la división sintética para obtener los valores de $f(x)$ o podemos conseguirlas por sustitución efectiva. En cuanto a otros tipos de ecuaciones, como *

$$\log x - x + 2 = 0,$$

debemos emplear, de hecho, la sustitución.

Ejemplo.

Dar una raíz irracional de $f(x) = x^3 + x - 5 = 0.$

SOLUCIÓN. De acuerdo con la Regla de Descartes, la ecuación tiene

* El símbolo log x quiere decir el logaritmo de x (ver Capítulo XIV).

Empleamos ahora la *ecuación rebajada*, $2x^3 - 6x^2 + 6x - 4 = 0$, representada por los números $2 - 6 + 6 - 4$, que es el cociente obtenido al dividir $f(-x) = 0$ por $x - 3/2$. Esto puede simplificarse, dividiéndolo por 2, hasta $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$. Tiene las mismas raíces que $f(-x) = 0$, con la excepción de $3/2$, que ha sido dividido.

Para la ecuación rebajada tenemos

Numeradores posibles: 1, 2.
Denominador posible: 1.
Raíces racionales posibles: 1, 2.

Ya hemos probado 1 en $f(-x)$. Probaremos 2:

$$\begin{array}{l} 1 - 3 + 3 - 2 \quad (\underline{2} \\ \quad\;\; 2 - 2 + 2 \\ \hline 1 - 1 + 1 \;(+0) \end{array}$$

$\therefore$ 2 es una raíz de la ecuación rebajada
-2 es una raíz de $f(x) = 0$.

La nueva ecuación rebajada es $x^2 - x + 1 = 0$. Resolviendo por medio de la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Las raíces de $f(x) = 0$ son las negativas de estas. La ecuación original era del grado 4 y hemos encontrado las 4 raíces; son

$$-\frac{3}{2}, \quad -2, \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Notar que, aunque cierto número ha sido determinado ya como raíz, puede ser también una raíz de la ecuación rebajada. Eso ocurrirá cuando es una raíz múltiple de la ecuación original.

EJERCICIOS XIII. F

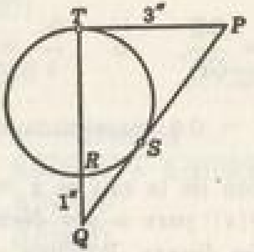
Dar las raíces racionales de las ecuaciones siguientes:

1. $x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0.$
2. $x^3 - 3x^2 - 8x - 10 = 0.$
3. $x^3 + x + 10 = 0.$
4. $2x^3 - 3x^2 - 7x - 6 = 0.$
5. $2x^3 + 7x^2 - 19x + 6 = 0.$
6. $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$
7. $5x^3 + 3x^2 + 13x - 6 = 0.$
8. $3x^3 + 4x^2 - 16x + 8 = 0.$
9. $6x^3 - 19x^2 + x + 6 = 0.$
10. $6x^3 - 29x^2 + 39x - 10 = 0.$
11. $2x^3 - 3x^2 + x - 6 = 0.$
12. $2x^3 + 13x^2 + 12x + 3 = 0.$
13. $12x^3 - 32x^2 - 33x - 7 = 0.$

14. $24x^3 + 50x^2 - 31x - 15 = 0.$
15. $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0.$
16. $x^4 - 3x^3 - 21x^2 - 43x + 60 = 0.$
17. $12x^4 - 20x^3 - 57x^2 + 50x + 75 = 0.$
18. $28x^4 - 3x^3 - 154x^2 - 54x + 36 = 0.$
19. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x + 6 = 0.$
20. $8x^4 - 24x^3 + 5x^2 + 52x - 15 = 0.$
21. $6x^4 - 31x^3 - 44x^2 + 371x - 392 = 0.$
22. $x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 20x - 44 = 0.$
23. En la Gráfica 13.3. la tangente TP tiene 3 pulgadas de largo. El diámetro TR se extiende 1 pulgada hasta el punto Q. La tangente QS, extendida, pasa a través de P. Dar el radio del círculo.

13.14. Raíces irracionales.

Las raíces irracionales de cualquier clase de una ecuación $f(x) = 0$ pueden determinarse por un proceso de aproximaciones sucesivas, empleando el principio general indicado en el núm. 13.6, que, cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos encontrados hay una raíz de $f(x) = 0$ entre a y b. Cuando la ecuación es una ecuación racional integral po-



GRÁF. 13.3.

demos emplear la división sintética para obtener los valores de $f(x)$ o podemos conseguirlas por sustitución efectiva. En cuanto a otros tipos de ecuaciones, como *

$$\log x - x + 2 = 0,$$

debemos emplear, de hecho, la sustitución.

Ejemplo.

Dar una raíz irracional de $f(x) = x^3 + x - 5 = 0.$

SOLUCIÓN. De acuerdo con la Regla de Descartes, la ecuación tiene

* El símbolo log x quiere decir el logaritmo de x (ver Capítulo XIV).

5. $x^3 - 3x + 1 = 0.$
6. $2x^3 + x^2 - 7 =$
7. $2x^3 + 9x^2 + 9 = 0.$
8. $x^3 - 9x + 12 =$
9. $x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0.$
10. $x^3 + 6x^2 + 6x -$
11. $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0.$
12. $x^3 - 9x^2 + 21x$
13. $4x^3 - 9x + 6 = 0.$
14. $x^3 - 9x^2 + 31x -$
15. $x^3 + 3x^2 - 3x - 3 = 0.$
16. $x^3 + 3x^2 - 2x -$
17. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0.$
18. $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0.$

13.15. Transformación para reducir las raíces de una una cantidad fija.

Para desarrollar un método más sistemático y más téc contrar las raíces irracionales de las ecuaciones racional es necesario poder transformar una ecuación en otra ec cuyas raíces son inferiores, en una cantidad dada, a las d original.

Suponiendo que la ecuación original es

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$

Si sustituimos x por $x' + h$, tenemos una nueva ecuació $x' = r$ es una raíz de la ecuación original, entonces $x' = r$ raíz de la ecuación transformada. Es decir, cada raíz de la ción será menor en una cantidad h que la raíz correspo ecuación antigua.

Estableciendo que $x = x' + h$ en (1), obtenemos

$$a_0(x' + h)^n + a_1(x' + h)^{n-1} + \cdots$$
$$+ a_{n-1}(x' + h) + a$$

o
$$a_0x'^n + A_1x'^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x' + A$$

Podemos determinar que A por el sistema de regresión hast $x' = x - h$ en (3). Esto nos da

$$a_0(x - h)^n + A_1(x - h)^{n-1} + \cdots$$
$$+ A_{n-1}(x - h) + A$$

que es sencillamente $f(x)$ dispuesto en potencias de $x -$

Se notará que A_n és el remanente cuando $f(x)$ se divid A_{n-1} es el remanente cuando el cociente resultante se divid etcétera...

Ejemplo.

Encontrar una ecuación cuya raíces son inferiores en 3 a las de $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 & -5 & +0 & +20 & -16 & (3 \\
 & 3 & -6 & -18 & +6 & \\
\hline
1 & -2 & -6 & +2| & -10 & \\
 & 3 & +3 & -9| & & \\
\hline
1 & +1 & -3| & -7 & & \\
 & 3 & +12| & & & \\
\hline
1 & +4| & +9 & & & \\
 & 3| & & & & \\
\hline
1 & +7 & & & &
\end{array}$$

La ecuación transformada es

$$x'^4 + 7x'^3 + 9x'^2 - 7x' - 10 = 0.$$

EJERCICIO

Revisar el resultado verificando que las raíces de la ecuación original sean $-2, 1, 2, 4$ y las de la ecuación transformada sean $-5, -2, -1, 1$.

EJERCICIOS XIII. H

Dar ecuaciones cuyas raíces son iguales a las raíces de las ecuaciones siguientes reducidas en la cantidad indicada.

1. $x^3 - 3x^2 + 2x - 7 = 0$, 3.
2. $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$, 1.
3. $2x^3 + 5x^2 - 6x - 4 = 0$, 2.
4. $2x^3 - 7x^2 - 6x - 1 = 0$, 4.
5. $x^3 + x^2 - 20 = 0$, 3.
6. $3x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 0$, -2.
7. $4x^3 - x^2 - 6x + 5 = 0$, -1.
8. $x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$, 0.3.
9. $8x^3 + 8x - 7 = 0$, 0.6.
10. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 24x + 12 = 0$, 3.
11. $x^4 - 12x^2 + 24x - 5 = 0$, -4.
12. $2x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 6x - 15 = 0$, 1.

13.16. Método de Horner.

Este método para encontrar la raíz irracional de una ecuación racional integral se explica mejor por medio de un ejemplo.

5. $x^3 - 3x + 1 = 0$.
6. $2x^3 + x^2 - 7 = 0$.
7. $2x^3 + 9x^2 + 9 = 0$.
8. $x^3 - 9x + 12 = 0$.
9. $x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$.
10. $x^3 + 6x^2 + 6x - 10 = 0$.
11. $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$.
12. $x^3 - 9x^2 + 21x - 15 = 0$.
13. $4x^3 - 9x + 6 = 0$.
14. $x^3 - 9x^2 + 31x - 15 = 0$.
15. $x^3 + 3x^2 - 3x - 3 = 0$.
16. $x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$.
17. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$.
18. $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$.

13.15. Transformación para reducir las raíces de una ecuación en una cantidad fija.

Para desarrollar un método más sistemático y más técnico para encontrar las raíces irracionales de las ecuaciones racionales integrales, es necesario poder transformar una ecuación en otra ecuación nueva cuyas raíces son inferiores, en una cantidad dada, a las de la ecuación original.

Suponiendo que la ecuación original es

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (1)$$

Si sustituimos x por $x' + h$, tenemos una nueva ecuación en x', y si $x' = r$ es una raiz de la ecuación original, entonces $x' = r - h$ será una raíz de la ecuación transformada. Es decir, cada raíz de la nueva ecuación será menor en una cantidad h que la raíz correspondiente de la ecuación antigua.

Estableciendo que $x = x' + h$ en (1), obtenemos

$$a_0(x' + h)^n + a_1(x' + h)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x' + h) + a_n = 0, \qquad (2)$$

o

$$a_0x'^n + A_1x'^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x' + A_n = 0. \qquad (3)$$

Podemos determinar que A por el sistema de regresión hasta (1) fijando $x' = x - h$ en (3). Esto nos da

$$a_0(x - h)^n + A_1(x - h)^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x - h) + A_n = 0, \qquad (4)$$

que es sencillamente $f(x)$ dispuesto en potencias de $x - h$.

Se notará que A_n és el remanente cuando $f(x)$ se divide por $x - h$, A_{n-1} es el remanente cuando el cociente resultante se divide por $x - h$, etcétera. . .

Ejemplo.

Encontrar una ecuación cuya raíces son inferiores en 3 a las de $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$.

Solución.

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 & -5 & +0 & +20 & -16 & (3 \\
 & 3 & -6 & -18 & +6 & \\
\hline
1 & -2 & -6 & +2| & -10 & \\
 & 3 & +3 & -9| & & \\
\hline
1 & +1 & -3| & -7 & & \\
 & 3 & +12| & & & \\
\hline
1 & +4| & +9 & & & \\
 & 3| & & & & \\
\hline
1 & +7 & & & &
\end{array}$$

La ecuación transformada es

$$x'^4 + 7x'^3 + 9x'^2 - 7x' - 10 = 0.$$

EJERCICIO

Revisar el resultado verificando que las raíces de la ecuación original sean -2, 1, 2, 4 y las de la ecuación transformada sean -5, -2, -1, 1.

EJERCICIOS XIII. H

Dar ecuaciones cuyas raíces son iguales a las raíces de las ecuaciones siguientes reducidas en la cantidad indicada.

1. $x^3 - 3x^2 + 2x - 7 = 0$, 3.
2. $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$, 1.
3. $2x^3 + 5x^2 - 6x - 4 = 0$, 2.
4. $2x^3 - 7x^2 - 6x - 1 = 0$, 4.
5. $x^3 + x^2 - 20 = 0$, 3.
6. $3x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 0$, -2.
7. $4x^3 - x^2 - 6x + 5 = 0$, -1.
8. $x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$, 0.3.
9. $8x^3 + 8x - 7 = 0$, 0.6.
10. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 24x + 12 = 0$, 3.
11. $x^4 - 12x^2 + 24x - 5 = 0$, -4.
12. $2x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 6x - 15 = 0$, 1.

13.16. Método de Horner.

Este método para encontrar la raíz irracional de una ecuación racional integral se explica mejor por medio de un ejemplo.

5. $x^3 - 3x + 1 = 0.$ 6. $2x^3 + x^2 - 7 = 0.$
7. $2x^3 + 9x^2 + 9 = 0.$ 8. $x^3 - 9x + 12 = 0.$
9. $x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0.$ 10. $x^3 + 6x^2 + 6x - 10 = 0.$
11. $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0.$ 12. $x^3 - 9x^2 + 21x - 15 = 0.$
13. $4x^3 - 9x + 6 = 0.$ 14. $x^3 - 9x^2 + 31x - 15 = 0.$
15. $x^3 + 3x^2 - 3x - 3 = 0.$ 16. $x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0.$
17. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0.$
18. $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0.$

13.15. Transformación para reducir las raíces de una ecuación en una cantidad fija.

Para desarrollar un método más sistemático y más técnico para encontrar las raíces irracionales de las ecuaciones racionales integrales, es necesario poder transformar una ecuación en otra ecuación nueva cuyas raíces son inferiores, en una cantidad dada, a las de la ecuación original.

Suponiendo que la ecuación original es

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (1)$$

Si sustituimos x por $x' + h$, tenemos una nueva ecuación en x', y si $x' = r$ es una raiz de la ecuación original, entonces $x' = r - h$ será una raíz de la ecuación transformada. Es decir, cada raíz de la nueva ecuación será menor en una cantidad h que la raíz correspondiente de la ecuación antigua.

Estableciendo que $x = x' + h$ en (1), obtenemos

$$a_0(x' + h)^n + a_1(x' + h)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x' + h) + a_n = 0, \quad (2)$$

o

$$a_0x'^n + A_1x'^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x' + A_n = 0. \quad (3)$$

Podemos determinar que A por el sistema de regresión hasta (1) fijando $x' = x - h$ en (3). Esto nos da

$$a_0(x - h)^n + A_1(x - h)^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x - h) + A_n = 0, \quad (4)$$

que es sencillamente $f(x)$ dispuesto en potencias de $x - h$.

Se notará que A_n és el remanente cuando $f(x)$ se divide por $x - h$, A_{n-1} es el remanente cuando el cociente resultante se divide por $x - h$, etcétera...

Ejemplo.

Encontrar una ecuación cuya raíces son inferiores en 3 a las de $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 & -5 & +0 & +20 & -16 & (3 \\
 & 3 & -6 & -18 & +6 & \\
\hline
1 & -2 & -6 & +2 & -10 & \\
 & 3 & +3 & -9 & & \\
\hline
1 & +1 & -3 & -7 & & \\
 & 3 & +12 & & & \\
\hline
1 & +4 & +9 & & & \\
 & 3 & & & & \\
\hline
1 & +7 & & & &
\end{array}$$

La ecuación transformada es

$$x'^4 + 7x'^3 + 9x'^2 - 7x' - 10 = 0.$$

EJERCICIO

Revisar el resultado verificando que las raíces de la ecuación original sean $-2, 1, 2, 4$ y las de la ecuación transformada sean $-5, -2, -1, 1$.

EJERCICIOS XIII. H

Dar ecuaciones cuyas raíces son iguales a las raíces de las ecuaciones siguientes reducidas en la cantidad indicada.

1. $x^3 - 3x^2 + 2x - 7 = 0$, 3.
2. $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$, 1.
3. $2x^3 + 5x^2 - 6x - 4 = 0$, 2.
4. $2x^3 - 7x^2 - 6x - 1 = 0$, 4.
5. $x^3 + x^2 - 20 = 0$, 3.
6. $3x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 0$, -2.
7. $4x^3 - x^2 - 6x + 5 = 0$, -1.
8. $x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$, 0.3.
9. $8x^3 + 8x - 7 = 0$, 0.6.
10. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 24x + 12 = 0$, 3.
11. $x^4 - 12x^2 + 24x - 5 = 0$, -4.
12. $2x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 6x - 15 = 0$, 1.

13.16. Método de Horner.

Este método para encontrar la raíz irracional de una ecuación racional integral se explica mejor por medio de un ejemplo.

Ejemplo.

Dar la raíz irracional de

$$f(x) = x^3 + x - 5 = 0.$$

Por medio de una división sintética (o por sustitución), que $f(1) = -3$, $f(2) = 5$. Así, $f(x)$ tiene una raíz entre formamos (1) en una ecuación cuyas raíces son inferiores de (1), de manera a que la nueva ecuación tenga alguna raíz

```
1 + 0 + 1 — 5   (1
    1 + 1 + 2
1 + 1 + 2| — 3
    1 + 2|
1 + 2| + 4
    1|
1 + 3
```

La ecuación transformada queda

$$f_1(x_1) = x_1^3 + 3x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0.$$

Cuando x_1 es pequeño, x_1^3 es pequeño también y podemos aproximación bastante exacta a la raíz de (2) al resolver $3x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0$, obteniendo $x_1 = 0.5+$. (La raíz única que se ha considerado.) Por medio de la división sintéti mos que $f_1(0.6) = 0.696$, $f_1(0.5) = -0.125$. El principio que debe tenerse en cuenta es que cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen tos, hay una raíz de $f(x) = 0$ entre a y b.

Transformar (2) en una ecuación cuyas raíces son infer

```
1 + 3.0 + 4.00 — 3.000   (0.5
    0.5 + 1.75 + 2.875
1 + 3.5 + 5.75| — 0.125
    0.5 + 2.00|
1 + 4.0| + 7.75
    0.5|
1 + 4.5
```

La ecuación transformada es

$$f_2(x_2) = x_2^3 + 4.5x_2^2 + 7.75x_2 - 0.125 = 0.$$

Para lograr una aproximación a la raíz de (3), dejar a un lado y poner $7.75x_2 - 0.125 = 0$, obteniendo $x_2 = 0.016$. $f(0.02) = 0.031808$, $f(0.01) = -0.047049$.

Transformar (3) en una ecuación cuyas raíces son inferiores en 0.01:

```
1 + 4.50 + 7.7500 — 0.125000   (0.01
     0.01 + 0.0451 + 0.077951
------------------------------
1 + 4.51 + 7.7951| — 0.047049
     0.01 + 0.0452|
-------------------
1 + 4.52| + 7.8403
     0.01|
----------
1 + 4.53
```

La siguiente ecuación transformada es

$$f_3(x_3) = x_3^3 + 4.53x_3^2 + 7.8403x_3 - 0.047049 = 0. \qquad (4)$$

Poniendo $7.8403x_3 - 0.047049 = 0$, obtenemos $x_3 = 0.0060$.

La raíz de $f(x) = 0$ es

$$x = 1 + 0.5 + 0.01 + 0.0060 = 1.5160.$$

Esto es, con toda seguridad, correcto hasta 2 lugares decimales y, muy probablemente, hasta 3. El trabajo puede seguirse cuando se desea.

La solución puede mostrarse en forma compacta como sigue:

```
1 + 0 + 1 — 5   (1
    1 + 1 + 2
---------------
1 + 1 + 2| — 3
    1 + 2|
-----------
1 + 2| + 4
    1|
--------
1 + 3.0 + 4.00 — 3.000   (0.5              3x1² + 4x1 — 3 = 0,
    0.5 + 1.75 + 2.875                                x1 = 0.5.
------------------------
1 + 3.5 + 5.75| — 0.125
    0.5 + 2.00|
---------------
1 + 4.0| + 7.75
    0.5|
-----------
1 + 4.50 + 7.7500 — 0.125000   (0.01     7.75x2 — 0.125 = 0,
    0.01 + 0.0451 + 0.077951                          x2 = 0.016.
------------------------------
1 + 4.51 + 7.7951| — 0.047049
    0.01 + 0.0452|
-------------------
1 + 4.52| + 7.8403                      7.8403x3 — 0.047049 = 0,
    0.01|                                             x3 = 0.0060.
----------
1 + 4.53                                               x = 1.5160.
```

En este ejemplo, los remanentes en la división sintética han sido siempre negativos. Esto se debe a que al pasar el valor cero (con x aumentado), $f(x)$ cambia de negativo a positivo. En el caso contrario, queremos que los remanentes sean positivos.

Ejemplo.

Dar la raíz irracional de

$$f(x) = x^3 + x - 5 = 0. \tag{1}$$

Por medio de una división sintética (o por sustitución), encontramos que $f(1) = -3$, $f(2) = 5$. Así, $f(x)$ tiene una raíz entre 1 y 2. Transformamos (1) en una ecuación cuyas raíces son inferiores en 1 que las de (1), de manera a que la nueva ecuación tenga alguna raíz entre 0 y 1:

$$\begin{array}{llll}
1 + 0 & + 1 & - 5 & (\underline{1} \\
\phantom{1 +{}} 1 & + 1 & + 2 & \\
\hline
1 + 1 & + 2 & - 3 & \\
\phantom{1 +{}} 1 & + 2 & & \\
\hline
1 + 2 & + 4 & & \\
\phantom{1 +{}} 1 & & & \\
\hline
1 + 3 & & &
\end{array}$$

La ecuación transformada queda

$$f_1(x_1) = x_1^3 + 3x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0. \tag{2}$$

Cuando x_1 es pequeño, x_1^3 es pequeño también y podemos obtener una aproximación bastante exacta a la raíz de (2) al resolver la ecuación $3x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0$, obteniendo $x_1 = 0.5+$. (La raíz positiva es la única que se ha considerado.) Por medio de la división sintética, encontramos que $f_1(0.6) = 0.696$, $f_1(0.5) = -0.125$. El principio fundamental que debe tenerse en cuenta es que cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, hay una raíz de $f(x) = 0$ entre a y b.

Transformar (2) en una ecuación cuyas raíces son inferiores en 0.5:

$$\begin{array}{llll}
1 + 3.0 & + 4.00 & - 3.000 & (\underline{0.5} \\
\phantom{1 +{}} 0.5 & + 1.75 & + 2.875 & \\
\hline
1 + 3.5 & + 5.75 & - 0.125 & \\
\phantom{1 +{}} 0.5 & + 2.00 & & \\
\hline
1 + 4.0 & + 7.75 & & \\
\phantom{1 +{}} 0.5 & & & \\
\hline
1 + 4.5 & & &
\end{array}$$

La ecuación transformada es

$$f_2(x_2) = x_2^3 + 4.5x_2^2 + 7.75x_2 - 0.125 = 0. \tag{3}$$

Para lograr una aproximación a la raíz de (3), dejar a un lado $x_2^3 + 4.5 \times x_2^2$ y poner $7.75x_2 - 0.125 = 0$, obteniendo $x_2 = 0.016$. Encontramos $f(0.02) = 0.031808$, $f(0.01) = -0.047049$.

Transformar (3) en una ecuación cuyas raíces son inferiores en 0.01:

$$\begin{array}{l} 1 + 4.50 + 7.7500 - 0.125000 \quad (\underline{0.01} \\ \quad\;\; 0.01 + 0.0451 + 0.077951 \\ \hline 1 + 4.51 + 7.7951| - 0.047049 \\ \quad\;\; 0.01 + 0.0452| \\ \hline 1 + 4.52| + 7.8403 \\ \quad\;\; 0.01| \\ \hline 1 + 4.53 \end{array}$$

La siguiente ecuación transformada es

$$f_3(x_3) = x_3^3 + 4.53x_3^2 + 7.8403x_3 - 0.047049 = 0. \qquad (4)$$

Poniendo $7.8403x_3 - 0.047049 = 0$, obtenemos $x_3 = 0.0060$.

La raíz de $f(x) = 0$ es

$$x = 1 + 0.5 + 0.01 + 0.0060 = 1.5160.$$

Esto es, con toda seguridad, correcto hasta 2 lugares decimales y, muy probablemente, hasta 3. El trabajo puede seguirse cuando se desea.

La solución puede mostrarse en forma compacta como sigue:

$$\begin{array}{lr} 1 + 0 + 1 - 5 \quad (\underline{1} & \\ \quad\; 1 + 1 + 2 & \\ \hline 1 + 1 + 2| - 3 & \\ \quad\; 1 + 2| & \\ \hline 1 + 2| + 4 & \\ \quad\; 1| & \\ \hline 1 + 3.0 + 4.00 - 3.000 \quad (\underline{0.5} & 3x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0, \\ \quad\; 0.5 + 1.75 + 2.875 & x_1 = 0.5. \\ \hline 1 + 3.5 + 5.75| - 0.125 & \\ \quad\; 0.5 + 2.00| & \\ \hline 1 + 4.0| + 7.75 & \\ \quad\; 0.5| & \\ \hline 1 + 4.50 + 7.7500 - 0.125000 \quad (\underline{0.01} & 7.75x_2 - 0.125 = 0, \\ \quad\; 0.01 + 0.0451 + 0.077951 & x_2 = 0.016. \\ \hline 1 + 4.51 + 7.7951| - 0.047049 & \\ \quad\; 0.01 + 0.0452| & \\ \hline 1 + 4.52| + 7.8403 & 7.8403x_3 - 0.047049 = 0, \\ \quad\; 0.01| & x_3 = 0.0060. \\ \hline 1 + 4.53 & \mathbf{x} = 1.5160. \end{array}$$

En este ejemplo, los remanentes en la división sintética han sido siempre negativos. Esto se debe a que al pasar el valor cero (con x aumentado), $f(x)$ cambia de negativo a positivo. En el caso contrario, queremos que los remanentes sean positivos.

Ejemplo.

Dar la raíz irracional de

$$f(x) = x^3 + x - 5 = 0. \qquad (1)$$

Por medio de una división sintética (o por sustitución), encontramos que $f(1) = -3$, $f(2) = 5$. Así, $f(x)$ tiene una raíz entre 1 y 2. Transformamos (1) en una ecuación cuyas raíces son inferiores en 1 que las de (1), de manera a que la nueva ecuación tenga alguna raíz entre 0 y 1:

$$\begin{array}{l}
1 + 0 + 1 - 5 \quad (\underline{1} \\
\phantom{1 + {}} 1 + 1 + 2 \\
\hline
1 + 1 + 2 \,|\, - 3 \\
\phantom{1 + {}} 1 + 2\,| \\
\hline
1 + 2\,| + 4 \\
\phantom{1 + {}} 1\,| \\
\hline
1 + 3
\end{array}$$

La ecuación transformada queda

$$f_1(x_1) = x_1^3 + 3x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0. \qquad (2)$$

Cuando x_1 es pequeño, x_1^3 es pequeño también y podemos obtener una aproximación bastante exacta a la raíz de (2) al resolver la ecuación $3x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0$, obteniendo $x_1 = 0.5+$. (La raíz positiva es la única que se ha considerado.) Por medio de la división sintética, encontramos que $f_1(0.6) = 0.696$, $f_1(0.5) = -0.125$. El principio fundamental que debe tenerse en cuenta es que cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, hay una raíz de $f(x) = 0$ entre a y b.

Transformar (2) en una ecuación cuyas raíces son inferiores en 0.5:

$$\begin{array}{l}
1 + 3.0 + 4.00 - 3.000 \quad (\underline{0.5} \\
\phantom{1 + {}} 0.5 + 1.75 + 2.875 \\
\hline
1 + 3.5 + 5.75\,| - 0.125 \\
\phantom{1 + {}} 0.5 + 2.00\,| \\
\hline
1 + 4.0\,| + 7.75 \\
\phantom{1 + {}} 0.5\,| \\
\hline
1 + 4.5
\end{array}$$

La ecuación transformada es

$$f_2(x_2) = x_2^3 + 4.5x_2^2 + 7.75x_2 - 0.125 = 0. \qquad (3)$$

Para lograr una aproximación a la raíz de (3), dejar a un lado $x_2^3 + 4.5 \times {}_2^2$ y poner $7.75x_2 - 0.125 = 0$, obteniendo $x_2 = 0.016$. Encontramos $f(0.02) = 0.031808$, $f(0.01) = -0.047049$.

Transformar (3) en una ecuación cuyas raíces son inferiores en 0.01:

$$\begin{array}{llll}
1 + 4.50 & + 7.7500 & - 0.125000 & (\underline{0.01} \\
\ 0.01 & + 0.0451 & + 0.077951 & \\
\hline
1 + 4.51 & + 7.7951| & - 0.047049 & \\
\ 0.01 & + 0.0452| & & \\
\hline
1 + 4.52| & + 7.8403 & & \\
\ 0.01| & & & \\
\hline
1 + 4.53 & & &
\end{array}$$

La siguiente ecuación transformada es

$$f_3(x_3) = x_3^3 + 4.53x_3^2 + 7.8403x_3 - 0.047049 = 0. \qquad (4)$$

Poniendo $7.8403x_3 - 0.047049 = 0$, obtenemos $x_3 = 0.0060$.

La raíz de $f(x) = 0$ es

$$x = 1 + 0.5 + 0.01 + 0.0060 = 1.5160.$$

Esto es, con toda seguridad, correcto hasta 2 lugares decimales y, muy probablemente, hasta 3. El trabajo puede seguirse cuando se desea.

La solución puede mostrarse en forma compacta como sigue:

$$\begin{array}{llllll}
1 + 0 & + 1 & - 5 & (\underline{1} & & \\
\ 1 & + 1 & + 2 & & & \\
\hline
1 + 1 & + 2| & - 3 & & & \\
\ 1 & + 2| & & & & \\
\hline
1 + 2| & + 4 & & & & \\
\ 1| & & & & & \\
\hline
1 + 3.0 & + 4.00 & - 3.000 & (\underline{0.5} & & 3x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0, \\
\ 0.5 & + 1.75 & + 2.875 & & & x_1 = 0.5. \\
\hline
1 + 3.5 & + 5.75| & - 0.125 & & & \\
\ 0.5 & + 2.00| & & & & \\
\hline
1 + 4.0| & + 7.75 & & & & \\
\ 0.5| & & & & & \\
\hline
1 + 4.50 & + 7.7500 & - 0.125000 & (\underline{0.01} & & 7.75x_2 - 0.125 = 0, \\
\ 0.01 & + 0.0451 & + 0.077951 & & & x_2 = 0.016. \\
\hline
1 + 4.51 & + 7.7951| & - 0.047049 & & & \\
\ 0.01 & + 0.0452| & & & & \\
\hline
1 + 4.52| & + 7.8403 & & & & 7.8403x_3 - 0.047049 = 0, \\
\ 0.01| & & & & & x_3 = 0.0060. \\
\hline
1 + 4.53 & & & & & \mathbf{x} = 1.5160.
\end{array}$$

En este ejemplo, los remanentes en la división sintética han sido siempre negativos. Esto se debe a que al pasar el valor cero (con x aumentado), $f(x)$ cambia de negativo a positivo. En el caso contrario, queremos que los remanentes sean positivos.

Para encontrar la raíz negativa de $f(x) = 0$ por medi
de Horner, encontrar la raíz positiva correspondiente de
y anteponer un signo menos.

13.17. Sugestiones para encontrar las raíces reales de numérica.

Conseguir tanta información como sea posible a cerca
leza de las raíces basándose en la Regla de Signos de D

Eliminar todas las raíces racionales, reduciendo la e
vez que se elimina una raíz de este tipo.

Aprovechar siempre cualquier información a cerca d
superiores e inferiores de las raíces, mientras se buscan
cionales o irracionales.

Cuando se han eliminado todas las raíces racionales,
raíces irracionales de la ecuación rebajada por el método ex
núm. 13.14 o por el método de Horner.

Cuando sea posible reducir la ecuación a una ecuació
la solución puede completarse resolviendo esta cuadrática.

Las raíces negativas pueden encontrarse resolviendo f

EJERCICIOS XIII. I

Dar todas las raíces reales de las ecuaciones siguientes, c
tres decimales:

1. $x^3 + 2x - 5 = 0.$
2. $x^3 - x - 3 = 0.$
3. $x^3 + 6x^2 + x - 9 = 0.$
4. $x^3 - 3x^2 + 7x -$
5. $3x^3 + 4x^2 - 5 = 0.$
6. $x^3 + 7x^2 + 17x$
7. $x^3 + 18x + 30 = 0.$
8. $x^3 - 5x + 1 = 0$
9. $x^3 + 2x^2 - 6x - 2 = 0.$
10. $x^3 - 6x^2 + 18x -$
11. $x^3 - 3x^2 + 12x - 16 = 0.$
12. $x^3 + 3x^2 - 6x +$
13. $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0.$
14. $3x^3 - 18x^2 + 27x$
15. $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0.$
16. $x^4 - 4x^2 - 8x -$
17. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 24x + 12 = 0.$
18. $x^5 + x^3 - 1 = 0.$
19. $x^5 + x^3 - 1 = 0$

Extraer la raíces siguientes, exactas hasta la tercera decim
el método de Horner o el método indicado en el núm. 13.14

20. $\sqrt[3]{20}.$

SUGESTIÓN. Encontrar la raíz ral de la ecuación x^3

21. $\sqrt[3]{25}.$ 22. $\sqrt[3]{10}.$ 23. $\sqrt[3]{50}.$

Resolver las ecuaciones simultáneas siguientes:

24. $x^4 + y^4 = 97,$
$x + y = 1.$

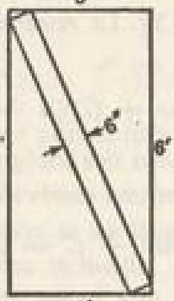
25. $x^2 + y = 4,$
$x + y^2 = 2.$

26. El largo de una caja rectangular tiene 2 pulgadas más que su ancho y 5 pulgadas más que su altura. Su volumen es de 100 pulgadas cúbicas. ¿Cuál es su altura?

27. Tiene que fabricarse una charola con una lámina rectangular de metal de 15 × 20 pulgadas, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados de manera que sean perpendiculares a la base. ¿Cuál es el tamaño del cuadrado que debe cortarse para que la charola tenga una capacidad de 300 pulgadas cúbicas?

28. Las aristas de una caja rectangular son de 5, 6 y 12 pulgadas respectivamente. ¿En cuanto deberá aumentarse cada dimensión, el mismo aumento para las tres aristas, de manera que el volumen de la caja aumente en 200 pulgadas cúbicas?

29. Un caja rectangular tiene 6 pies de largo y 3 pies de ancho. Se coloca una tabla de 6 pulgadas de ancho en el fondo de la caja, en la posición indicada en la Grág. 13.7. Dar el largo de esta tabla.



GRÁF. 13.7.

30. Un monumento en la entrada de una carretera tiene la forma de un prisma recto, cuya base es un cuadrado y cuya altura es de 4 pies, encima del cual hay una esfera con un diámetro igual al lado de la base del prisma. Si el volumen total es de 20 pies cúbicos, ¿cuál es el diámetro de la esfera?

13.18. La ecuación cúbica general.

La ecuación cúbica general es

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \qquad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2}$$

Para encontrar la raíz negativa de $f(x) = 0$ por medio del método de Horner, encontrar la raíz positiva correspondiente de $f(-x) = 0$ y anteponer un signo menos.

13.17. Sugestiones para encontrar las raíces reales de una ecuacion numérica.

Conseguir tanta información como sea posible a cerca de la naturaleza de las raíces basándose en la Regla de Signos de Descartes.

Eliminar todas las raíces racionales, reduciendo la ecuación cada vez que se elimina una raíz de este tipo.

Aprovechar siempre cualquier información a cerca de los límites superiores e inferiores de las raíces, mientras se buscan las raíces racionales o irracionales.

Cuando se han eliminado todas las raíces racionales, encontrar las raíces irracionales de la ecuación rebajada por el método explicado en el núm. 13.14 o por el método de Horner.

Cuando sea posible reducir la ecuación a una ecuación cuadrática, la solución puede completarse resolviendo esta cuadrática.

Las raíces negativas pueden encontrarse resolviendo $f(-x) = 0$.

EJERCICIOS XIII. I

Dar todas las raíces reales de las ecuaciones siguientes, correctas hasta tres decimales:

1. $x^3 + 2x - 5 = 0$.
2. $x^3 - x - 3 = 0$.
3. $x^3 + 6x^2 + x - 9 = 0$.
4. $x^3 - 3x^2 + 7x - 11 = 0$.
5. $3x^3 + 4x^2 - 5 = 0$.
6. $x^3 + 7x^2 + 17x + 13 = 0$.
7. $x^3 + 18x + 30 = 0$.
8. $x^3 - 5x + 1 = 0$.
9. $x^3 + 2x^2 - 6x - 2 = 0$.
10. $x^3 - 6x^2 + 18x - 22 = 0$.
11. $x^3 - 3x^2 + 12x - 16 = 0$.
12. $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$.
13. $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$.
14. $3x^3 - 18x^2 + 27x + 4 = 0$.
15. $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$.
16. $x^4 - 4x^2 - 8x - 4 = 0$.
17. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 24x + 12 = 0$.
18. $x^5 + x^3 - 1 = 0$.
19. $x^5 + x^2 - 1 = 0$.

Extraer la raíces siguientes, exactas hasta la tercera decimal, empleando el método de Horner o el método indicado en el núm. 13.14:

20. $\sqrt[3]{20}$.

Sugestión. Encontrar la raíz ral de la ecuación $x^3 = 20$.

21. $\sqrt[3]{25}$.
22. $\sqrt[3]{10}$.
23. $\sqrt[3]{50}$.

Resolver las ecuaciones simultáneas siguientes:

24. $x^4 + y^4 = 97,$
$x + y = 1.$

25. $x^2 + y = 4,$
$x + y^2 = 2.$

26. El largo de una caja rectangular tiene 2 pulgadas más que su ancho y 5 pulgadas más que su altura. Su volumen es de 100 pulgadas cúbicas. ¿Cuál es su altura?

27. Tiene que fabricarse una charola con una lámina rectangular de metal de 15 × 20 pulgadas, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados de manera que sean perpendiculares a la base. ¿Cuál es el tamaño del cuadrado que debe cortarse para que la charola tenga una capacidad de 300 pulgadas cúbicas?

28. Las aristas de una caja rectangular son de 5, 6 y 12 pulgadas respectivamente. ¿En cuanto deberá aumentarse cada dimensión, el mismo aumento para las tres aristas, de manera que el volumen de la caja aumente en 200 pulgadas cúbicas?

29. Un caja rectangular tiene 6 pies de largo y 3 pies de ancho. Se coloca una tabla de 6 pulgadas de ancho en el fondo de la caja, en la posición indicada en la Grág. 13.7. Dar el largo de esta tabla.

GRÁF. 13.7.

30. Un monumento en la entrada de una carretera tiene la forma de un prisma recto, cuya base es un cuadrado y cuya altura es de 4 pies, encima del cual hay una esfera con un diámetro igual al lado de la base del prisma. Si el volumen total es de 20 pies cúbicos, ¿cuál es el diámetro de la esfera?

13.18. La ecuación cúbica general.

La ecuación cúbica general es

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \qquad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2}$$

Para encontrar la raíz negativa de $f(x) = 0$ por medio del método de Horner, encontrar la raíz positiva correspondiente de $f(-x) = 0$ y anteponer un signo menos.

13.17. Sugestiones para encontrar las raíces reales de una ecuacion numérica.

Conseguir tanta información como sea posible a cerca de la naturaleza de las raíces basándose en la Regla de Signos de Descartes.

Eliminar todas las raíces racionales, reduciendo la ecuación cada vez que se elimina una raíz de este tipo.

Aprovechar siempre cualquier información a cerca de los límites superiores e inferiores de las raíces, mientras se buscan las raíces racionales o irracionales.

Cuando se han eliminado todas las raíces racionales, encontrar las raíces irracionales de la ecuación rebajada por el método explicado en el núm. 13.14 o por el método de Horner.

Cuando sea posible reducir la ecuación a una ecuación cuadrática, la solución puede completarse resolviendo esta cuadrática.

Las raíces negativas pueden encontrarse resolviendo $f(-x) = 0$.

EJERCICIOS XIII. I

Dar todas las raíces reales de las ecuaciones siguientes, correctas hasta tres decimales:

1. $x^3 + 2x - 5 = 0$.
2. $x^3 - x - 3 = 0$.
3. $x^3 + 6x^2 + x - 9 = 0$.
4. $x^3 - 3x^2 + 7x - 11 = 0$.
5. $3x^3 + 4x^2 - 5 = 0$.
6. $x^3 + 7x^2 + 17x + 13 = 0$.
7. $x^3 + 18x + 30 = 0$.
8. $x^3 - 5x + 1 = 0$.
9. $x^3 + 2x^2 - 6x - 2 = 0$.
10. $x^3 - 6x^2 + 18x - 22 = 0$.
11. $x^3 - 3x^2 + 12x - 16 = 0$.
12. $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$.
13. $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$.
14. $3x^3 - 18x^2 + 27x + 4 = 0$.
15. $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$.
16. $x^4 - 4x^2 - 8x - 4 = 0$.
17. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 24x + 12 = 0$.
18. $x^5 + x^3 - 1 = 0$.
19. $x^5 + x^2 - 1 = 0$.

Extraer la raíces siguientes, exactas hasta la tercera decimal, empleando el método de Horner o el método indicado en el núm. 13.14:

20. $\sqrt[3]{20}$.

Sugestión. Encontrar la raíz ral de la ecuación $x^3 = 20$.

21. $\sqrt[3]{25}$.
22. $\sqrt[3]{10}$.
23. $\sqrt[3]{50}$.

Resolver las ecuaciones simultáneas siguientes:

24. $x^4 + y^4 = 97,$ $x + y = 1.$

25. $x^2 + y = 4,$ $x + y^2 = 2.$

26. El largo de una caja rectangular tiene 2 pulgadas más que su ancho y 5 pulgadas más que su altura. Su volumen es de 100 pulgadas cúbicas. ¿Cuál es su altura?

27. Tiene que fabricarse una charola con una lámina rectangular de metal de 15 × 20 pulgadas, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados de manera que sean perpendiculares a la base. ¿Cuál es el tamaño del cuadrado que debe cortarse para que la charola tenga una capacidad de 300 pulgadas cúbicas?

28. Las aristas de una caja rectangular son de 5, 6 y 12 pulgadas respectivamente. ¿En cuanto deberá aumentarse cada dimensión, el mismo aumento para las tres aristas, de manera que el volumen de la caja aumente en 200 pulgadas cúbicas?

29. Un caja rectangular tiene 6 pies de largo y 3 pies de ancho. Se coloca una tabla de 6 pulgadas de ancho en el fondo de la caja, en la posición indicada en la Grág. 13.7. Dar el largo de esta tabla.

GRÁF. 13.7.

30. Un monumento en la entrada de una carretera tiene la forma de un prisma recto, cuya base es un cuadrado y cuya altura es de 4 pies, encima del cual hay una esfera con un diámetro igual al lado de la base del prisma. Si el volumen total es de 20 pies cúbicos, ¿cuál es el diámetro de la esfera?

13.18. La ecuación cúbica general.

La ecuación cúbica general es

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \qquad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2}$$

donde

$$b = \frac{a_1}{a_0}, \qquad c = \frac{a_2}{a_0}, \qquad d = \frac{a_3}{a_0}.$$

Fijar

$$x = y - \frac{b}{3},$$

y (2) se transforma en

$$y^3 + Cy + D = 0,$$

en el cual

$$C = c - \frac{b^2}{3}, \qquad D = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}.$$

La ecuación (5) es llamada *ecuación cúbica (rebajada)*

Para resolver la ecuación cúbica (rebajada) reducida, dos incógnitas, u y v, cuya suma debe ser la raíz de la ec (rebajada) reducida; es decir que fijamos

$$y = u + v,$$

y hacemos la sustitución en (5). La ecuación resultante pu se en la forma

$$u^3 + v^3 + (3uv + C)(u + v) + D = 0$$

Puesto que hemos sustituido dos incógnitas, u y v, por cógnita y, podemos imponerles una condición. Si imponemo

$$3uv + C = 0,$$

la ecuación (8) se reduce a una forma más sencilla

$$u^3 + v^3 + D = 0.$$

Resolviendo (9) por v y sustituyendo en (10), obte

$$u^3 - \frac{C^3}{27u^3} + D = 0,$$

o

$$u^6 + Du^3 - \frac{C^3}{27} = 0.$$

que es una ecuación cuadrática en u^3, y encontramos

$$u^3 = -\frac{D}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}.$$

Tomando

$$u^3 = -\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}, \tag{14}$$

Encontramos de (10) que

$$v^3 = -\frac{D}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27} \tag{15}$$

Nota. Si tomamos $u^3 = -\frac{D}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}$, encontramos que $v^3 = -\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}$; es decir que u y v han sido intercambiados sencillamente. Es de esperarse puesto que entran simétricamente en varias ecuaciones como (7), (8) y (9).

Hay tres raíces cúbicas de (14) y tres raíces cúbicas de (15). Pueden determinarse de acuerdo con los métodos del núm. 12.9. Que U y V sean las raíces cúbicas de (14) y de (15) respectivamente, lo que satisface la condición (9), a saber, $3UV = -C$. Las otras raíces cúbicas de (14) son ωU y $\omega^2 U$, y las otras raíces cúbicas de (15) son ωV y $\omega^2 V$ donde ω y ω^2 son las raíces cúbicas imaginarias de 1 (ver ejercicios XII. F, 23), a saber,

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \qquad \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Estas raíces pueden emparejarse para satisfacer (9) como sigue:

$$3 \cdot \omega U \cdot \omega^2 V = -C, \qquad 3 \cdot \omega^2 U \cdot \omega V = -C.$$

Cuando estos pares de valores se sustituyen en (7), obtenemos para las raíces de la ecuación cúbica reducida,

$$y_1 = U + V, \quad y_2 = \omega U + \omega^2 V, \quad y_3 = \omega^2 U + \omega V. \tag{16}$$

Empleando (4) y (3), encontramos para las raíces de (1),

$$\begin{aligned} x_1 &= U + V - \frac{a_1}{3a_0}, \\ x_2 &= \omega U + \omega^2 V - \frac{a_1}{3a_0}, \\ x_3 &= \omega^2 U + \omega V - \frac{a_1}{3a_0}. \end{aligned} \tag{17}$$

Estas expresiones para las raíces de una ecuación cúbica se llaman *Fórmulas de Cardan*.

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 + 15x + 1 = 0$. (18)

donde

$$b = \frac{a_1}{a_0}, \quad c = \frac{a_2}{a_0}, \quad d = \frac{a_3}{a_0}. \tag{3}$$

Fijar

$$x = y - \frac{b}{3}, \tag{4}$$

y (2) se transforma en

$$y^3 + Cy + D = 0, \tag{5}$$

en el cual

$$C = c - \frac{b^2}{3}, \quad D = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}. \tag{6}$$

La ecuación (5) es llamada *ecuación cúbica (rebajada) reducida.*

Para resolver la ecuación cúbica (rebajada) reducida, introducimos dos incógnitas, u y v, cuya suma debe ser la raíz de la ecuación cúbica (rebajada) reducida; es decir que fijamos

$$y = u + v, \tag{7}$$

y hacemos la sustitución en (5). La ecuación resultante puede expresarse en la forma

$$u^3 + v^3 + (3uv + C)(u + v) + D = 0. \tag{8}$$

Puesto que hemos sustituido dos incógnitas, u y v, por una sola incógnita y, podemos imponerles una condición. Si imponemos la condición

$$3uv + C = 0, \tag{9}$$

la ecuación (8) se reduce a una forma más sencilla

$$u^3 + v^3 + D = 0. \tag{10}$$

Resolviendo (9) por v y sustituyendo en (10), obtenemos

$$u^3 - \frac{C^3}{27u^3} + D = 0, \tag{11}$$

o

$$u^6 + Du^3 - \frac{C^3}{27} = 0. \tag{12}$$

que es una ecuación cuadrática en u^3, y encontramos

$$u^3 = - \frac{D}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}. \tag{13}$$

Tomando

$$u^3 = -\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}, \tag{14}$$

Encontramos de (10) que

$$v^3 = -\frac{D}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27} \tag{15}$$

NOTA. Si tomamos $u^3 = -\frac{D}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}$, encontramos que $v^3 = -\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}$; es decir que u y v han sido intercambiados sencillamente. Es de esperarse puesto que entran simétricamente en varias ecuaciones como (7), (8) y (9).

Hay tres raíces cúbicas de (14) y tres raíces cúbicas de (15). Pueden determinarse de acuerdo con los métodos del núm. 12.9. Que U y V sean las raíces cúbicas de (14) y de (15) respectivamente, lo que satisface la condición (9), a saber, $3UV = -C$. Las otras raíces cúbicas de (14) son ωU y $\omega^2 U$, y las otras raíces cúbicas de (15) son ωV y $\omega^2 V$ donde ω y ω^2 son las raíces cúbicas imaginarias de 1 (ver ejercicios XII. F, 23), a saber,

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \qquad \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Estas raíces pueden emparejarse para satisfacer (9) como sigue:

$$3 \cdot \omega U \cdot \omega^2 V = -C, \qquad 3 \cdot \omega^2 U \cdot \omega V = -C.$$

Cuando estos pares de valores se sustituyen en (7), obtenemos para las raíces de la ecuación cúbica reducida,

$$y_1 = U + V, \quad y_2 = \omega U + \omega^2 V, \quad y_3 = \omega^2 U + \omega V. \tag{16}$$

Empleando (4) y (3), encontramos para las raíces de (1),

$$\begin{aligned} x_1 &= U + V - \frac{a_1}{3a_0}, \\ x_2 &= \omega U + \omega^2 V - \frac{a_1}{3a_0}, \\ x_3 &= \omega^2 U + \omega V - \frac{a_1}{3a_0}. \end{aligned} \tag{17}$$

Estas expresiones para las raíces de una ecuación cúbica se llaman *Fórmulas de Cardan.*

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 + 15x + 1 = 0.$ (18)

donde

$$b = \frac{a_1}{a_0}, \quad c = \frac{a_2}{a_0}, \quad d = \frac{a_3}{a_0}. \tag{3}$$

Fijar

$$x = y - \frac{b}{3}, \tag{4}$$

y (2) se transforma en

$$y^3 + Cy + D = 0, \tag{5}$$

en el cual

$$C = c - \frac{b^2}{3}, \quad D = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}. \tag{6}$$

La ecuación (5) es llamada *ecuación cúbica (rebajada) reducida.*

Para resolver la ecuación cúbica (rebajada) reducida, introducimos dos incógnitas, u y v, cuya suma debe ser la raíz de la ecuación cúbica (rebajada) reducida; es decir que fijamos

$$y = u + v, \tag{7}$$

y hacemos la sustitución en (5). La ecuación resultante puede expresarse en la forma

$$u^3 + v^3 + (3uv + C)(u + v) + D = 0. \tag{8}$$

Puesto que hemos sustituido dos incógnitas, u y v, por una sola incógnita y, podemos imponerles una condición. Si imponemos la condición

$$3uv + C = 0, \tag{9}$$

la ecuación (8) se reduce a una forma más sencilla

$$u^3 + v^3 + D = 0. \tag{10}$$

Resolviendo (9) por v y sustituyendo en (10), obtenemos

$$u^3 - \frac{C^3}{27u^3} + D = 0, \tag{11}$$

o

$$u^6 + Du^3 - \frac{C^3}{27} = 0. \tag{12}$$

que es una ecuación cuadrática en u^3, y encontramos

$$u^3 = - \frac{D}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + 4C^3/27.} \tag{13}$$

Tomando

$$u^3 = -\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}, \tag{14}$$

Encontramos de (10) que

$$v^3 = -\frac{D}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27} \tag{15}$$

NOTA. Si tomamos $u^3 = -\frac{D}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}$, encontramos que $v^3 = -\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4C^3/27}$; es decir que u y v han sido intercambiados sencillamente. Es de esperarse puesto que entran simétricamente en varias ecuaciones como (7), (8) y (9).

Hay tres raíces cúbicas de (14) y tres raíces cúbicas de (15). Pueden determinarse de acuerdo con los métodos del núm. 12.9. Que U y V sean las raíces cúbicas de (14) y de (15) respectivamente, lo que satisface la condición (9), a saber, $3UV = -C$. Las otras raíces cúbicas de (14) son ωU y $\omega^2 U$, y las otras raíces cúbicas de (15) son ωV y $\omega^2 V$ donde ω y ω^2 son las raíces cúbicas imaginarias de 1 (ver ejercicios XII. F, 23), a saber,

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \qquad \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Estas raíces pueden emparejarse para satisfacer (9) como sigue:

$$3 \cdot \omega U \cdot \omega^2 V = -C, \qquad 3 \cdot \omega^2 U \cdot \omega V = -C.$$

Cuando estos pares de valores se sustituyen en (7), obtenemos para las raíces de la ecuación cúbica reducida,

$$y_1 = U + V, \quad y_2 = \omega U + \omega^2 V, \quad y_3 = \omega^2 U + \omega V. \tag{16}$$

Empleando (4) y (3), encontramos para las raíces de (1),

$$\begin{aligned} x_1 &= U + V - \frac{a_1}{3a_0}, \\ x_2 &= \omega U + \omega^2 V - \frac{a_1}{3a_0}, \\ x_3 &= \omega^2 U + \omega V - \frac{a_1}{3a_0}. \end{aligned} \tag{17}$$

Estas expresiones para las raíces de una ecuación cúbica se llaman *Fórmulas de Cardan*.

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 + 15x + 1 = 0$. (18)

Solución. Que $x = y - 1$.

$$y^3 + 12y - 12 = 0.$$

colocar $y = u + v$ en (20):

$$u^3 + v^3 + (3uv + 12)(u + v) - 12 = 0$$

Imponer la condición

$$3uv + 12 = 0, \quad o \quad uv = -4.$$

reducido (21) a $\quad u^3 + v^3 - 12 = 0.$

Eliminar v entre (22) y (23):

$$u^6 - 12u^3 - 64 = 0.$$
$$u^3 = 16.$$

De (22), $\quad v^3 = -4.$

Tomar $\quad U = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}, \quad V = -\sqrt[3]{4}$

Estos valores satisfacen (22).

$y_1 = 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, $y_2 = \omega 2\sqrt[3]{2} - \omega^2\sqrt[3]{4}$, $y_3 = \omega^2 2\sqrt[3]{2}$

$x_1 = 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 1$, $x_2 = \omega 2\sqrt[3]{2} - \omega^2\sqrt[3]{4} - 1$,

$$x_3 = \omega^2 2\sqrt[3]{2}$$

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación $x^3 - 12x - 8 = 0$.

Solución. Fijar $x = u + v$ en (28):

$$u^3 + v^3 + (3uv - 12)(u + v) - 8 =$$

Imponer la condición

$$3uv - 12 = 0, \quad o \quad uv = 4,$$

reduciendo (29) a

$$u^3 + v^3 - 8 = 0.$$

Eliminar v entre (30) y (31):

$$u^6 = 8u^3 + 64 = 0.$$

$$u^3 = 4 + 4\sqrt{3} \cdot i = 8 \text{ cis } 60 \text{ grados}.$$

De (30), $\quad v^3 = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i = 8 \text{ cis } (-60 \text{ gr.})$

Como las raíces cúbicas de (33) y de (34) toman respectiva

$$U = 2 \text{ cis } 20 \text{ grados}, \qquad V = 2 \text{ cis } (-20 \text{ gr.}$$

Estos valores satisfacen (30).

$$\begin{aligned} x_1 &= U + V = 4 \cos 20 \text{ grados} = 3.759, \\ x_2 &= \omega U + \omega^2 V = 2 \text{ cis } 140 \text{ gr.} + 2 \text{ cis } 220 \text{ gr.} \\ &= -4 \cos 40 \text{ gr.} = -3.064, \\ x_3 &= \omega^2 U + \omega V = 2 \text{ cis } 260 \text{ gr.} + 2 \text{ cis } 100 \text{ gr.} \\ &= -4 \cos 80 \text{ gr.} = -0.695. \end{aligned}$$

13.19. La ecuación cuadrática general.

La ecuación general cuártica, o del cuarto grado, es

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \tag{1}$$

o

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \tag{2}$$

El primer paso para la solución de (2) consiste en escribirlo bajo la forma

$$x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e. \tag{3}$$

Completar el cuadrado del lado izquierdo agregando $b^2x^2/4$ a ambos lados:

$$x^4 + bx^3 + \frac{b^2x^2}{4} = \left(\frac{b^2}{4} - c\right) x^2 - dx - e. \tag{4}$$

Introducimos ahora un número y, cuyo valor se ha de determinar *más* tarde, y añadimos $\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) y + \frac{y^2}{4}$ a ambos lados de (4) para obtener

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) y + \frac{y^2}{4}$$

$$= \left(\frac{b^2}{4} - c + y \right) x^2 + \left(\frac{by}{2} - d\right) x + \frac{y^2}{4} - e. \tag{5}$$

El miembro de la derecha de (5) es cuadrático en x y será un cuadrado perfecto cuando su discriminante sea cero, es decir, cuando

$$\left(\frac{by}{2} - d\right)^2 - 4\left(\frac{b^2}{4} - c + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - e\right) = 0. \tag{6}$$

La ecuación (6) se simplifica en*

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0. \tag{7}$$

Ahora determinamos y de manera a que (7) se satisfaga; es decir,

* La ecuación (7) se llama el cúbico resolvente de (1), o (2).

SOLUCIÓN. Que $x = y - 1$. (19)

$$y^3 + 12y - 12 = 0. \qquad (20)$$

colocar $y = u + v$ en (20):

$$u^3 + v^3 + (3uv + 12)(u + v) - 12 = 0. \qquad (21)$$

Imponer la condición

$$3uv + 12 = 0, \quad \text{o} \quad uv = -4. \qquad (22)$$

reduciendo (21) a $\qquad u^3 + v^3 - 12 = 0. \qquad (23)$

Eliminar v entre (22) y (23):

$$u^6 - 12u^3 - 64 = 0. \qquad (24)$$

$$u^3 = 16. \qquad (25)$$

De (22), $\qquad v^3 = -4. \qquad (26)$

Tomar $\qquad U = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}, \quad V = -\sqrt[3]{4} \qquad (27)$

Estos valores satisfacen (22).

$y_1 = 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4},\ y_2 = \omega 2\sqrt[3]{2} - \omega^2\sqrt[3]{4},\ y_3 = \omega^2 2\sqrt[3]{2} - \omega\sqrt[3]{4};$

$x_1 = 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 1,\ x_2 = \omega 2\sqrt[3]{2} - \omega^2\sqrt[3]{4} - 1,$

$$x_3 = \omega^2 2\sqrt[3]{2} - \omega\sqrt[3]{4} - 1.$$

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación $x^3 - 12x - 8 = 0$. (28)

SOLUCIÓN. Fijar $x = u + v$ en (28):

$$u^3 + v^3 + (3uv - 12)(u + v) - 8 = 0. \qquad (29)$$

Imponer la condición

$$3uv - 12 = 0, \quad \text{o} \quad uv = 4, \qquad (30)$$

reduciendo (29) a

$$u^3 + v^3 - 8 = 0. \qquad (31)$$

Eliminar v entre (30) y (31):

$$u^6 = 8u^3 + 64 = 0. \qquad (32)$$

$$u^3 = 4 + 4\sqrt{3} \cdot i = 8 \text{ cis } 60 \text{ grados}. \qquad (33)$$

De (30), $\qquad v^3 = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i = 8 \text{ cis } (-60 \text{ gr.}). \qquad (34)$

Como las raíces cúbicas de (33) y de (34) toman respectivamente

$$U = 2 \text{ cis } 20 \text{ grados}, \qquad V = 2 \text{ cis } (-20 \text{ gr.}). \qquad (35)$$

Estos valores satisfacen (30).

$x_1 = U + V = 4 \cos 20 \text{ grados} = 3.759,$
$x_2 = \omega U + \omega^2 V = 2 \text{ cis } 140 \text{ gr.} + 2 \text{ cis } 220 \text{ gr.}$
$= -4 \cos 40 \text{ gr.} = -3.064,$
$x_3 = \omega^2 U + \omega V = 2 \text{ cis } 260 \text{ gr.} + 2 \text{ cis } 100 \text{ gr.}$
$= -4 \cos 80 \text{ gr.} = -0.695.$

13.19. La ecuación cuadrática general.

La ecuación general cuártica, o del cuarto grado, es

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \quad (1)$$

o

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \quad (2)$$

El primer paso para la solución de (2) consiste en escribirlo bajo la forma

$$x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e. \quad (3)$$

Completar el cuadrado del lado izquierdo agregando $b^2x^2/4$ a ambos lados:

$$x^4 + bx^3 + \frac{b^2x^2}{4} = \left(\frac{b^2}{4} - c\right) x^2 - dx - e. \quad (4)$$

Introducimos ahora un número y, cuyo valor se ha de determinar *más* tarde, y añadimos $\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) y + \frac{y^2}{4}$ a ambos lados de (4) para obtener

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) y + \frac{y^2}{4}$$
$$= \left(\frac{b^2}{4} - c + y\right) x^2 + \left(\frac{by}{2} - d\right) x + \frac{y^2}{4} - e. \quad (5)$$

El miembro de la derecha de (5) es cuadrático en x y será un cuadrado perfecto cuando su discriminante sea cero, es decir, cuando

$$\left(\frac{by}{2} - d\right)^2 - 4\left(\frac{b^2}{4} - c + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - e\right) = 0. \quad (6)$$

La ecuación (6) se simplifica en *

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0. \quad (7)$$

Ahora determinamos y de manera a que (7) se satisfaga; es decir,

* La ecuación (7) se llama el cúbico resolvente de (1), o (2).

Solución. Que $x = y - 1$. (19)

$$y^3 + 12y - 12 = 0. \tag{20}$$

colocar $y = u + v$ en (20):

$$u^3 + v^3 + (3uv + 12)(u + v) - 12 = 0. \tag{21}$$

Imponer la condición

$$3uv + 12 = 0, \quad \text{o} \quad uv = -4. \tag{22}$$

reduciendo (21) a

$$u^3 + v^3 - 12 = 0. \tag{23}$$

Eliminar v entre (22) y (23):

$$u^6 - 12u^3 - 64 = 0. \tag{24}$$

$$u^3 = 16. \tag{25}$$

De (22),

$$v^3 = -4. \tag{26}$$

Tomar

$$U = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}, \quad V = -\sqrt[3]{4} \tag{27}$$

Estos valores satisfacen (22).

$$y_1 = 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4},\ y_2 = \omega 2\sqrt[3]{2} - \omega^2\sqrt[3]{4},\ y_3 = \omega^2 2\sqrt[3]{2} - \omega\sqrt[3]{4};$$

$$x_1 = 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 1,\ x_2 = \omega 2\sqrt[3]{2} - \omega^2\sqrt[3]{4} - 1,$$

$$x_3 = \omega^2 2\sqrt[3]{2} - \omega\sqrt[3]{4} - 1.$$

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación $x^3 - 12x - 8 = 0$. (28)

Solución. Fijar $x = u + v$ en (28):

$$u^3 + v^3 + (3uv - 12)(u + v) - 8 = 0. \tag{29}$$

Imponer la condición

$$3uv - 12 = 0, \quad \text{o} \quad uv = 4, \tag{30}$$

reduciendo (29) a

$$u^3 + v^3 - 8 = 0. \tag{31}$$

Eliminar v entre (30) y (31):

$$u^6 = 8u^3 + 64 = 0. \tag{32}$$

$$u^3 = 4 + 4\sqrt{3} \cdot i = 8 \text{ cis } 60 \text{ grados}. \tag{33}$$

De (30),

$$v^3 = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i = 8 \text{ cis } (-60 \text{ gr.}). \tag{34}$$

Como las raíces cúbicas de (33) y de (34) toman respectivamente

$$U = 2 \text{ cis } 20 \text{ grados}, \quad V = 2 \text{ cis } (-20 \text{ gr.}). \tag{35}$$

Estos valores satisfacen (30).

$x_1 = U + V = 4 \cos 20$ grados $= 3.759,$
$x_2 = \omega U + \omega^2 V = 2$ cis 140 gr. $+ 2$ cis 220 gr.
$= -4 \cos 40$ gr. $= -3.064,$
$x_3 = \omega^2 U + \omega V = 2$ cis 260 gr. $+ 2$ cis 100 gr.
$= -4 \cos 80$ gr. $= -0.695.$

13.19. La ecuación cuadrática general.

La ecuación general cuártica, o del cuarto grado, es

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \qquad (1)$$

o

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \qquad (2)$$

El primer paso para la solución de (2) consiste en escribirlo bajo la forma

$$x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e. \qquad (3)$$

Completar el cuadrado del lado izquierdo agregando $b^2x^2/4$ a ambos lados:

$$x^4 + bx^3 + \frac{b^2x^2}{4} = \left(\frac{b^2}{4} - c\right) x^2 - dx - e. \qquad (4)$$

Introducimos ahora un número y, cuyo valor se ha de determinar *más* tarde, y añadimos $\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) y + \frac{y^2}{4}$ a ambos lados de (4) para obtener

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) y + \frac{y^2}{4}$$
$$= \left(\frac{b^2}{4} - c + y\right) x^2 + \left(\frac{by}{2} - d\right) x + \frac{y^2}{4} - e. \qquad (5)$$

El miembro de la derecha de (5) es cuadrático en x y será un cuadrado perfecto cuando su discriminante sea cero, es decir, cuando

$$\left(\frac{by}{2} - d\right)^2 - 4\left(\frac{b^2}{4} - c + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - e\right) = 0. \qquad (6)$$

La ecuación (6) se simplifica en *

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0. \qquad (7)$$

Ahora determinamos y de manera a que (7) se satisfaga; es decir,

* La ecuación (7) se llama el cúbico resolvente de (1), o (2).